8 ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น
Introduction to Graph Theory

กราฟเป็นเครื่องมือสำคัญที่ใช้ในการแก้ปัญหาในวิชาคอมบินาทอริค ในขณะเดียวกัน เทคนิคการนับในวิชาคอมบินาทอริคก็เป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหาในวิชาทฤษฎีกราฟเช่นกัน วิชาทฤษฎีกราฟเป็นวิชาซึ่งมีกำเนิดมานานแล้ว โดยเริ่มในปี ค.ศ.1736 นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสต์ ชื่อ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) ได้พยายามที่จะแก้ปัญหาซึ่งมีชื่อเสียงเป็นที่รู้จักกันดีในนาม "สะพานโคนิกส์เบริก" (Konigsberg bridge) ต่อมาในปี ค.ศ.1847 นักคณิตศาสตร์อีกท่านหนึ่งชื่อ เคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff) ได้นำเอาวิชาทฤษฎีกราฟไปประยุกต์ใช้กับการศึกษาเครือข่ายวงจรไฟฟ้า ในปี ค.ศ.1857 เคย์ลีย์ (Cayley) ได้นำวิชาทฤษฎีกราฟไปประยุกต์ใช้กับวิชาเคมีอินทรีย์ และแฮมิลตัน (Sir William Hamilton) ได้ใช้กราฟในการศึกษาเกมปริศนาต่าง ๆ นอกจากนี้ยังมีนักคณิตศาสตร์รวมทั้งผู้ที่มิใช่นักคณิตศาสตร์โดยตรงอีกมากมาย ได้นำวิชาทฤษฎีกราฟไปประยุกต์ใช้ในการศึกษาแผนที่และการระบายสีแผนที่ จนถึงศตวรรษที่ 20 วิชาทฤษฎีกราฟได้ถูกนำไปใช้อย่างกว้างขวางใน

สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า วิทยาการคอมพิวเตอร์ เคมี รัฐศาสตร์ นิเวศน์วิทยา พันธุศาสตร์ การขนส่ง และในสาขาอื่น ๆ อีกมากมาย

กล่าวโดยคร่าว ๆ แล้ว กราฟเป็นโครงสร้างเต็มหน่วย (discrete structure) ซึ่งประกอบด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมซึ่งเชื่อมจุดยอดเหล่านั้น ปัญหาต่าง ๆ ในเกือบทุกสาขาวิชา สามารถจำลองแบบได้ด้วยกราฟ ดังนั้น กราฟจึงเป็นเครื่องมือที่สำคัญอย่างหนึ่งที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์หรือแก้ปัญหาต่าง ๆ

8.1 นิยามและตัวอย่าง

Definitions and Some Examples

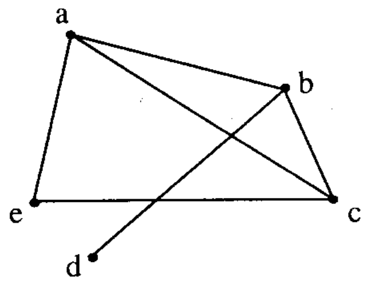
ในหัวข้อนี้ เราจะทำความรู้จักกับคำจำกัดความของศัพท์บางคำที่จำเป็นและเป็นพื้นฐานของวิชานี้ รวมทั้งแนะนำกราฟชนิดต่าง ๆ ที่มีลักษณะพิเศษที่เรามักพบเห็นเสมอ ๆ

นิยาม 8.1.1

กราฟ $G = (V,E)$ ประกอบด้วยเซตจำกัด $V = V(G)$ และมัลติเซตจำกัด $E = E(G)$ ซึ่งมีสมาชิกเป็นมัลติเซตขนาดสองของสมาชิกใน V เรียกสมาชิกของ V ว่า **จุดยอด** (vertex) เรียกสมาชิกใน E ว่า **เส้นเชื่อม** (edge) ถ้า $e = \{u, v\}$ เป็นเส้นเชื่อมใน E จะเรียก u และ v ว่า **จุดปลาย** (end vertex) ของเส้นเชื่อม e ถ้าจุดปลายทั้งสองของเส้นเชื่อมเป็นจุดเดียวกัน จะเรียกเส้นเชื่อมนั้นว่า **ห่วง** (loop)

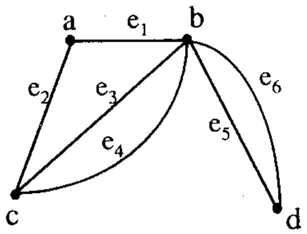
เราสามารถเขียนภาพของกราฟได้โดยแทนจุดยอดด้วยจุด แทนเส้นเชื่อมด้วยส่วนของเส้นตรงหรือเส้นโค้งที่เชื่อมระหว่างจุดปลายทั้งสองของเส้นเชื่อมนั้น

ตัวอย่าง 8.1.1 ให้ V(G) = {a, b, c, d, e} และ ให้ E(G) = {{a,b}, {a,c}, {a,e}, {b,c}, {b,d}, {c,e}} กราฟ G = (V,E) คือ กราฟในรูป 8.1.1 ■



รูป 8.1.1: กราฟ G

ตัวอย่าง 8.1.2 ให้ V(H) = {a, b, c, d} และให้ E(H) = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6} เมื่อ e_1 = {a,b}, e_2 = {a,c}, e_3 = {b,c}, e_4 = {b,c}, e_5={b,d} และ e_6 = {b,d} ดังนั้น H = (V,E) คือกราฟในรูป 8.1.2 จะเห็นว่ามีเส้นเชื่อมสองเส้นระหว่างจุดยอด b และ c ระหว่างจุดยอด b และ d มีเส้นเชื่อมสองเส้นเช่นกัน ■

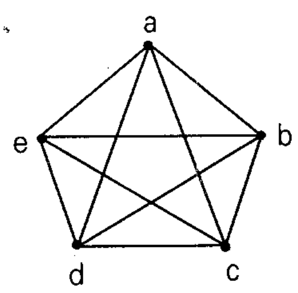


รูป 8.1.2 : กราฟ H

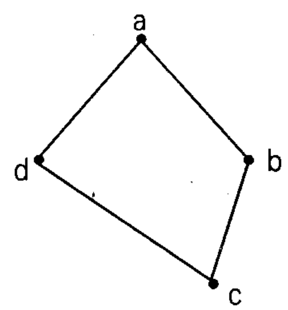
นิยาม 8.1.2

จะกล่าวว่า H = (W,F) เป็นกราฟย่อยของ G = (V,E) ถ้า W เป็นเซตย่อยของ V และ F เป็นมัลติเซตย่อยของ E

ตัวอย่าง 8.1.3 กราฟ H ในรูป 8.1.3 เป็นกราฟย่อยของ G



กราฟ G



กราฟ H

รูป 8.1.3

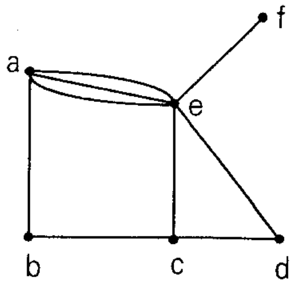
ในที่นี้ $V = \{a, b, c, d, e\}$, $W = \{a, b, c, d\}$, $E = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{a, d\}, \{a,e\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{b,e\}, \{c,d\}, \{c,e\}, \{d,e\}\}$ และ $F = \{\{a,b\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{c,d\}\}$ จะเห็นว่า $W \subseteq V$ และ $F \subseteq E$

■

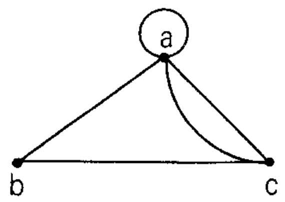
นิยาม 8.1.3

เรียกกราฟซึ่งอนุญาตให้มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดสองจุดได้มากกว่าหนึ่งเส้นว่า **มัลติกราฟ** (multi graph) และเรียกเส้นเชื่อมดังกล่าวว่า **เส้นเชื่อมพหุ** (multi edge) **กราฟเทียม** (pseudograph) คือกราฟที่อนุญาตให้มีทั้งเส้นเชื่อมพหุและห่วง เรียกกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมพหุและห่วงว่า **กราฟอย่างง่าย** (simple graph)

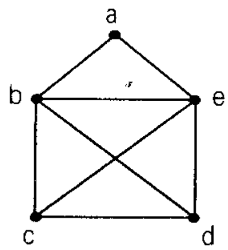
ตัวอย่าง 8.1.4 กราฟในรูป 8.1.2 และ รูป 8.1.4(ก) เป็นมัลติกราฟ ส่วนกราฟในรูป 8.1.4(ข) คือกราฟเทียม ส่วนกราฟในรูป 8.1.4 (ค) เป็นกราฟอย่างง่าย



รูป 8.1.4(ก)



รูป 8.1.4(ข)

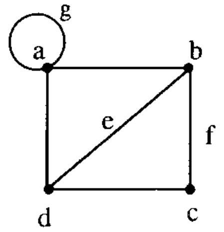


รูป 8.1.4 (ค)

นิยาม 8.1.4

เราจะกล่าวว่าจุดยอด u และ v ของกราฟ G เป็นจุดยอด **ประชิดกัน** (adjacent) ถ้า $e = \{u,v\}$ เป็นเส้นเชื่อมของ G นั่นคือ มีเส้นเชื่อม e เชื่อมระหว่าง u และ v และจะกล่าวว่าเส้นเชื่อม e **กระทบ** (incident) กับจุดยอด u และ v

ตัวอย่าง 8.1.5 ในรูป 8.1.5 จุดยอด a ประชิดกับจุดยอด b เพราะมีเส้นเชื่อมระหว่าง a และ b แต่จุดยอด a ไม่ประชิดกับจุดยอด c เพราะไม่มีเส้นเชื่อมระหว่าง a และ c เส้นเชื่อม e = {b,d} กระทบกับจุดยอด b และ d เส้นเชื่อม f = {b,c} กระทบกับจุดยอด b และ c ส่วนห่วง g = {a,a} กระทบกับจุดยอด a เพียงจุดเดียว



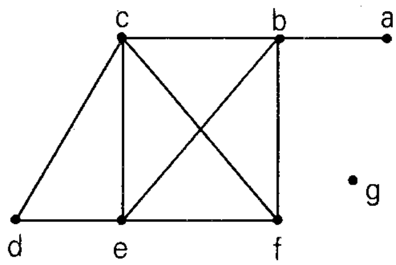
รูป 8.1.5

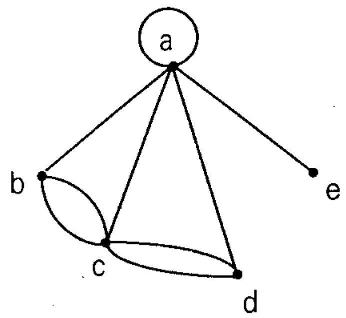
■

นิยาม 8.1.5

ดีกรี ของจุดยอด v คือ จำนวนเส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอด v เราจะเขียนแทนดีกรีของ v ด้วย deg(v) ห่วงแต่ละห่วงจะถูกนับสองครั้งเมื่อนับดีกรีของจุดยอดที่กระทบกับห่วงนั้น

ตัวอย่าง 8.1.6 จงหาดีกรีของจุดยอดของกราฟ G และ H ในรูป 8.1.6 และจงหาผลรวมของดีกรีของแต่ละกราฟ





รูป 8.1.6

วิธีทำ ในกราฟ G จะพบว่า deg(a) = 1 , deg(b) = deg(c) = deg(e) = 4

deg(d) = 2, deg(f) = 3 และ deg(g) = 0

ผลรวมของดีกรีของกราฟ G = 1 + 4 + 4 + 2 + 3 + 0 = 14

ในกราฟ H จะพบว่า deg(a) = 6 , deg(b) = 3 , deg(c) = 5 deg(d) = 3 , deg(e) = 1

ผลรวมของดีกรีของกราฟ H = 6+3+5+3+1 = 18 ■

จะเห็นว่า ถ้าเราบวกดีกรีของจุดยอดของกราฟ G ในรูป 8.1.6 เข้าด้วยกัน เส้นเชื่อมแต่ละเส้นของกราฟจะถูกนับเส้นละสองครั้ง คือถูกนับครั้งหนึ่งในการนับดีกรีของจุดปลายข้างหนึ่ง และถูกนับอีกครั้งหนึ่งในการนับดีกรีที่จุดปลายอีกข้างหนึ่ง ดังนั้น ถ้านับจำนวนดีกรีของจุดยอดทั้งหลายของ G รวมกัน ผลรวมจะต้องเป็นสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมของ G ดังในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.1.1

ถ้า G = (V,E) เป็นกราฟใด ๆ $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$ เมื่อ $|E|$ คือจำนวนเส้นเชื่อม (สมาชิก) ใน E

ข้อสังเกต 1. ทฤษฎีบทข้างบนนี้เป็นจริงสำหรับกราฟอย่างง่าย มัลติกราฟ และกราฟเทียมด้วย

2. ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหลายจะต้องเป็นจำนวนคู่เสมอ ซึ่งเป็นผลให้เราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.1.2

จำนวนจุดยอดซึ่งมีดีกรีเป็นจำนวนคี่จะต้องเป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ให้ V เป็นเซตของจุดยอดทั้งหลาย

V_1 เป็นเซตของจุดยอดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคู่ และ

V_2 เป็นเซตของจุดยอดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่

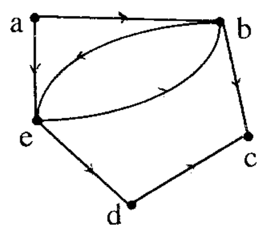
ดังนั้น $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$

พจน์แรกของจำนวนที่อยู่ขวาสุดเป็นจำนวนคู่เพราะดีกรีของจุดยอดแต่ละจุดใน V_1 เป็นจำนวนคู่และเนื่องจากผลรวมของสองพจน์ทางด้านขวาสุดเป็นจำนวนคู่ คือเท่ากับ $2|E|$ แสดงว่าพจน์สุดท้ายคือ $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ จะต้องเป็นจำนวนคู่ด้วย แต่ละพจน์ในผลบวก $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น จำนวนพจน์ใน $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ จะต้องเป็นจำนวนคู่ แสดงว่าจำนวนสมาชิกใน V_2 จะต้องเป็นจำนวนคู่ นั่นคือ จำนวนจุดยอดซึ่งมีดีกรีเป็นจำนวนคี่ จะต้องเป็นจำนวนคู่ ■

นิยาม 8.1.6

ถ้าเส้นเชื่อมแต่ละเส้นของกราฟเป็นคู่อันดับของจุดยอด เราจะเรียกเส้นเชื่อมนั้นว่า **เส้นเชื่อมระบุทิศทาง** (directed edge) และเรียกกราฟซึ่งมีเส้นเชื่อมทุกเส้นเป็นเส้นเชื่อมระบุทิศทางว่า **กราฟระบุทิศทาง** (directed graph)

ตัวอย่าง8.1.7 ให้ $V = \{a, b, c, d, e\}$ และ $E = \{(a,b), (a,e), (b,c), (b,e), (e,b), (d,c), (e,d)\}$ เราใช้หัวลูกศรสำหรับบ่งชี้ถึงทิศทางของเส้นเชื่อมจะได้กราฟระบุทิศทางในรูป 8.1.7 ■



รูป 8.1.7

นิยาม 8.1.7

ถ้า $e = (u,v)$ เป็นเส้นเชื่อมของกราฟระบุทิศทาง เราเรียกจุดยอด u ว่า **จุดเริ่มต้น** (initial vertex) และเรียกจุดยอด v ว่า **จุดสุดท้าย** (terminal vertex) ของเส้นเชื่อม e จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของห่วงจะเป็นจุดเดียวกัน

นิยาม 8.1.8

จำนวน **ดีกรีเข้า** (in-degree) ของจุดยอด v ของกราฟระบุทิศทาง คือจำนวนเส้นเชื่อมที่มี v เป็นจุดสุดท้าย ซึ่งจะแทนด้วย $deg^-(v)$ และ จำนวน **ดีกรีออก** (out-degree) ของจุดยอด v คือจำนวนเส้นเชื่อมที่มี v เป็นจุดเริ่มต้น ซึ่งจะแทนด้วย $deg^+(v)$

ข้อสังเกต ห่วงแต่ละห่วงที่จุด v จะถูกนับหนึ่งครั้งใน $deg^-(v)$ และถูกนับอีกหนึ่งครั้งใน $deg^+(v)$ และจะถูกนับสองครั้งใน deg(v)

ตัวอย่าง 8.1.8 จงหาจำนวนดีกรีเข้าและดีกรีออกของจุดยอดแต่ละจุดของกราฟระบุทิศทาง G ในรูป 8.1.8

$deg^-(a) = 2$ $deg^+(a) = 4$

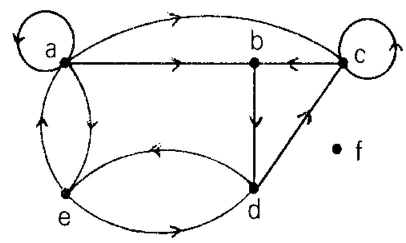
$deg^-(b) = 2$ $deg^+(b) = 1$

$deg^-(c) = 3$ $deg^+(c) = 2$

$deg^-(d) = 2$ $deg^+(d) = 2$

$deg^-(e) = 2$ $deg^+(e) = 2$

$deg^-(f) = 0$ $deg^+(f) = 0$



รูป 8.1.8

เส้นเชื่อมแต่ละเส้นของกราฟระบุทิศทางมีทั้งจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย ดังนั้น ผลรวมของดีกรีเข้าของจุดยอดทุกจุดย่อมเท่ากับผลรวมของดีกรีออกของจุดยอดทุกจุดและจะต้องเท่ากับจำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟนั้น ■

ทฤษฎีบท 8.1.3

ให้ G = (V,E) เป็นกราฟระบุทิศทาง จะได้

$$\sum_{v \in V} deg^-(v) = \sum_{v \in V} deg^+(v) = |E|$$

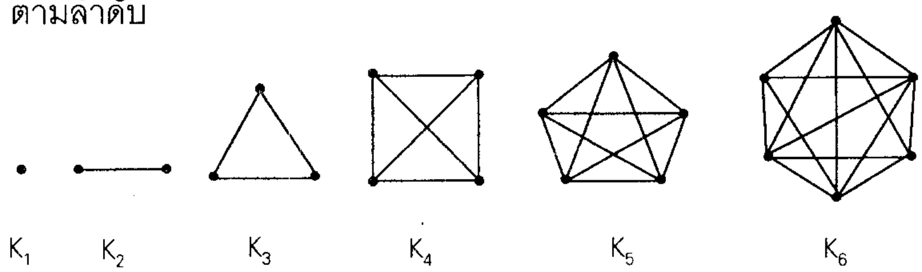
เมื่อ $|E|$ หมายถึงจำนวนสมาชิกใน E

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกราฟบางกราฟซึ่งมีลักษณะพิเศษ ซึ่งมักพบหรือถูกกล่าวถึงเสมอ ๆ

นิยาม 8.1.9

กราฟบริบูรณ์ (complete graph) คือกราฟซึ่งจุดยอดทุก ๆ คู่มีเส้นเชื่อมหนึ่งเส้น แทนกราฟบริบูรณ์ซึ่งมีจุดยอด n จุด ด้วย K_n

ตัวอย่าง 8.1.9 เมื่อ n = 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 เราได้กราฟบริบูรณ์ ดังแสดงในรูป 8.1.9 ตามลำดับ

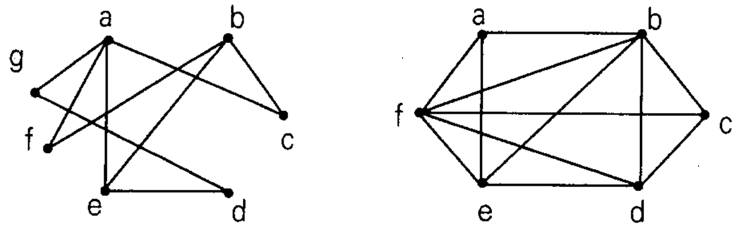


รูป 8.1.9

นิยาม 8.1.10

เรียกกราฟ G = (V,E) ว่า **กราฟสองส่วน** (bipartite graph) ถ้า G เป็นกราฟอย่างง่ายซึ่งสามารถแบ่งเซต V ของจุดยอดออกเป็นเซตย่อยสองเซตซึ่งไม่มีส่วนร่วมกันเลยและเส้นเชื่อมแต่ละเส้นใน E จะต้องเชื่อมระหว่างจุดยอดในเซตหนึ่งกับจุดยอดในเซตอีกเซตหนึ่งเท่านั้น ถ้าจุดยอดแต่ละจุดในเซตหนึ่งมีเส้นเชื่อมกับจุดยอดทุก ๆ จุดในอีกเซตหนึ่ง เราจะเรียกกราฟนั้นว่า **กราฟสองส่วนบริบูรณ์** ถ้าจำนวนสมาชิกในเซตทั้งสองนั้นเท่ากับ m และ n เราจะแทนกราฟสองส่วนบริบูรณ์นั้นด้วย $K_{m,n}$

ตัวอย่าง 8.1.10 กราฟ G ในรูป 8.1.10 เป็นกราฟสองส่วน

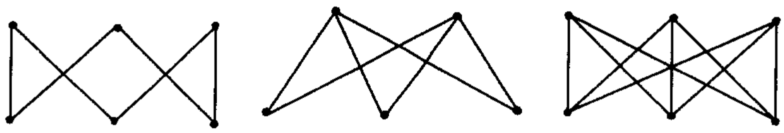


รูป 8.1.10 กราฟ G กราฟ H

เนื่องจากเราสามารถแบ่งเซตของจุดยอดออกได้เป็นสองเซตคือ V_1 = {a, b, d} และ V_2 = {c, e, f, g} นอกจากนี้เส้นเชื่อมแต่ละเส้นใน G จะเชื่อมระหว่างจุดยอดใน V_1 และ V_2 ส่วนกราฟ H ในรูป 8.1.10 ไม่เป็นกราฟสองส่วน ทั้งนี้เนื่องจากเราไม่สามารถแบ่งเซตของจุดยอดออกเป็นสองเซตที่สอดคล้องกับสมบัติของกราฟสองส่วนได้ ■

ตัวอย่าง 8.1.11 กราฟแรกในรูป 8.1.11 เป็นกราฟสองส่วน $K_{2,3}$ และ $K_{3,3}$ เป็นกราฟสองส่วน บริบูรณ์

รูป 8.1.11

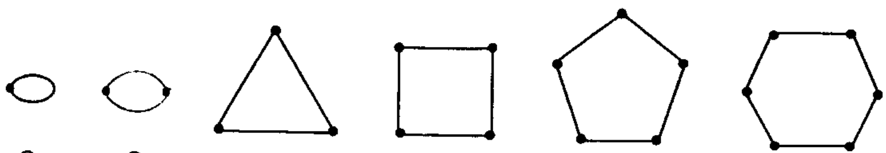


$K_{2,3}$ $K_{3,3}$

นิยาม 8.1.11

กราฟวัฏจักร (cycle graph) คือกราฟเชื่อมโยง(ดูนิยามหน้า 202) ซึ่งประกอบด้วยจุดยอด n จุดและเส้นเชื่อม n เส้น โดยจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเท่ากับสอง แทนกราฟวัฏจักรนี้ด้วย C_n

ตัวอย่าง 8.1.12 กราฟในรูป 8.1.12 เป็นกราฟของ C_3, C_4, C_5 และ C_6 ตามลำดับ



C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6

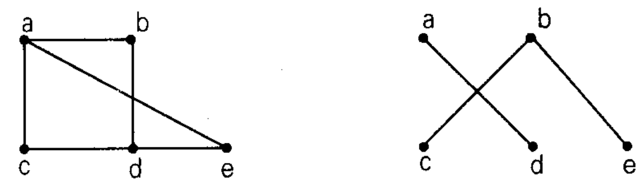
รูป 8.1.12

นิยาม 8.1.12

> ถ้า G เป็นกราฟอย่างง่าย **คอมพลีเมนต์** (complement) ของกราฟ G ซึ่งจะแทนด้วย $\overline{G}$ ก็คือกราฟอย่างง่ายซึ่งประกอบด้วยจุดยอดทุกจุดใน G จุดยอดสองจุดใน $\overline{G}$ จะมีเส้นเชื่อมก็ต่อเมื่อจุดยอดสองจุดนั้นไม่มีเส้นเชื่อมใน G

ตัวอย่าง 8.1.13 กราฟ G และ H ในรูป 8.1.13 เป็นคอมพลีเมนต์ของกันและกัน นั่นคือ G เป็นคอมพลีเมนต์ของ H และ H เป็นคอมพลีเมนต์ของ G

รูป 8.1.13

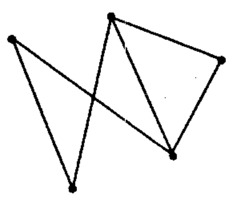


กราฟ G กราฟ H

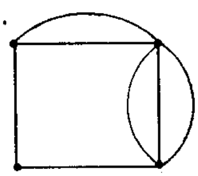
แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณากราฟต่อไปนี้ว่ากราฟใดเป็นกราฟอย่างง่าย มัลติกราฟ กราฟเทียม หรือเป็นกราฟระบุทิศทาง

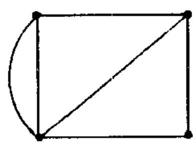
ก.



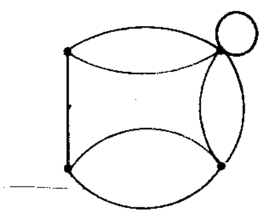
ข.



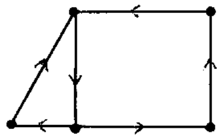
ค.



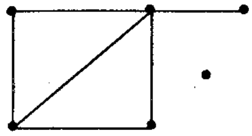
ง.



จ.

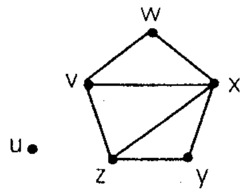


ฉ.

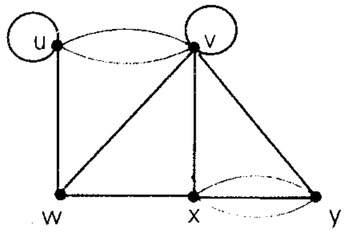


2. จากกราฟแต่ละข้อข้างล่างนี้ จงหาดีกรีของจุดยอดแต่ละจุด จำนวนเส้นเชื่อม จำนวนจุดยอดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่ และจำนวนจุดยอดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคู่

ก.

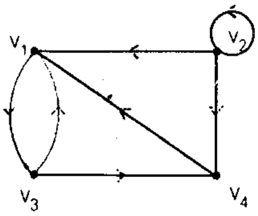


ข.

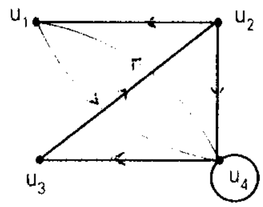


3. จงหาดีกรีเข้าและดีกรีออกของจุดยอดแต่ละจุดในกราฟต่อไปนี้

ก.



ข.



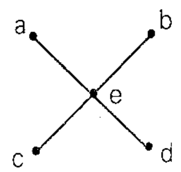
4. จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จะมีกราฟอย่างง่าย ซึ่งประกอบด้วยจุดยอด 15 จุด โดยที่จุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเท่ากับ 5

5. จงเขียนกราฟต่อไปนี้

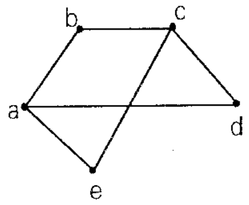
ก. K_7 ข. $K_{2,4}$ ค. $K_{4,4}$ ง. C_7

6. กราฟใดต่อไปนี้เป็นกราฟสองส่วน

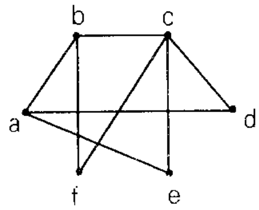
ก.



ข.



ค.



7. จงพิจารณาว่าจะมีกราฟซึ่งมีจุดยอด 5 จุด โดยที่จุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีดังต่อไปนี้ได้หรือไม่ ถ้ามี จงเขียนรูปของกราฟนั้น

ก. 3,3,3,3,2 ข. 1,2,3,4,5

ค. 1,1,1,1,1 ง. 3,4,3,4,3

8. จงหากราฟย่อยของ K_3 ทั้งหมด

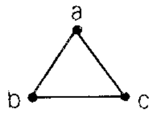
9. จงหาคอมพลีเมนต์ของกราฟแต่ละกราฟในข้อ 6

8.2 กราฟถอดแบบ

Isomorphism of Graphs

เมื่อกล่าวถึงสมบัติของกราฟเราหมายถึงโครงสร้างของกราฟ ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับชื่อหรือตำแหน่งของจุดยอดของกราฟ แต่จะขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ระหว่างจุดยอด เช่น กราฟ

$G_1 = (V_1, E_1)$ เมื่อ $V_1 = \{a,b,c\}$ และ $E_1 = \{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$



$G_2 = (V_2, E_2)$ เมื่อ $V_2 = \{1,2,3\}$ และ $E_2 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$

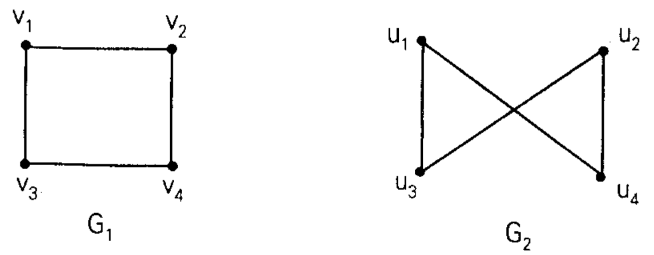
จะเห็นว่ากราฟ G_1 และกราฟ G_2 มีโครงสร้างเหมือนกัน จะต่างกันเฉพาะตำแหน่งและชื่อของจุดยอดเท่านั้น ในกรณีเช่นนี้เราจะกล่าวว่ากราฟ G_1 และกราฟ G_2 เป็นกราฟถอดแบบกัน (isomorphic : iso = same, morphic = shaped)

นิยาม 8.2.1

จะกล่าวว่ากราฟ $G_1 = (V_1,E_1)$ และกราฟ $G_2 = (V_2,E_2)$ เป็น **กราฟถอดแบบกัน** ถ้ามีฟังก์ชัน f แบบหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงจาก V_1 ไปยัง V_2 ซึ่งเมื่อ a และ b เป็นจุดยอดประชิดกันใน G_1 แล้ว f(a) และ f(b) จะเป็นจุดยอดประชิดกันใน G_2 ถ้า G_1 และ G_2 เป็นกราฟถอดแบบกัน เราจะเขียน $G_1 \cong G_2$

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ กราฟสองกราฟจะเป็นกราฟถอดแบบซึ่งกันและกัน ถ้ามีการจับคู่กันแบบสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างจุดยอดของทั้งสองกราฟ ซึ่งยัง **คงสภาพ** หรือ **รักษาสภาพ** (preserve) ของการเป็นจุดยอดประชิดกันอยู่ หมายความว่าถ้าจุดยอดสองจุดในกราฟหนึ่งเป็นจุดยอดประชิดกันแล้วภาพ (image) ของจุดยอดทั้งสองภายใต้การจับคู่นั้นจะเป็นจุดยอดประชิดกันในอีกกราฟหนึ่งด้วย

ตัวอย่าง 8.2.1 จงแสดงว่ากราฟ G_1 และกราฟ G_2 ข้างล่างนี้เป็นกราฟถอดแบบกัน



รูป 8.2.1

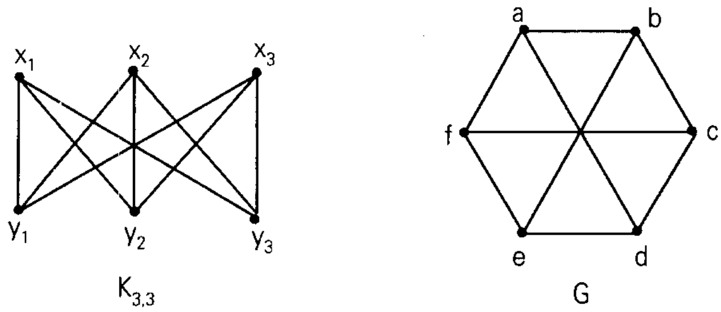
วิธีทำ ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง

$$f(v_1) = u_1,\ f(v_2) = u_4,\ f(v_3) = u_3 \text{ และ } f(v_4) = u_2$$

จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งจากเซต $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ไปทั่วถึงเซต $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ และจะพบว่า f ยังคงรักษาสภาพของการเป็นจุดยอดประชิดกัน เช่นพิจารณาจุดยอด v_1 และ v_2 ซึ่งเป็น

จุดยอดประชิดกันใน G_1 ภาพของ v_1 และ v_2 ภายใต้ฟังก์ชัน f คือ $f(v_1) = u_1$ และ $f(v_2) = u_4$ ตามลำดับ จะเห็นว่า u_1 และ u_4 ยังคงเป็นจุดยอดประชิดกันใน G_2 สำหรบจุดยอดคู่อื่น ๆ เราสามารถตรวจสอบได้ในทำนองเดียวกันว่าสอดคล้องกับสมบัติดังกล่าว ดังนั้น $G_1 \cong G_2$

ตัวอย่าง 8.2.2 จงแสดงว่ากราฟ $K_{3,3}$ และ G ข้างล่างนี้เป็นกราฟถอดแบบกัน



รูป 8.2.2

วิธีทำ จับคู่จุดยอดใน $K_{3,3}$ กับจุดยอดใน G ดังนี้

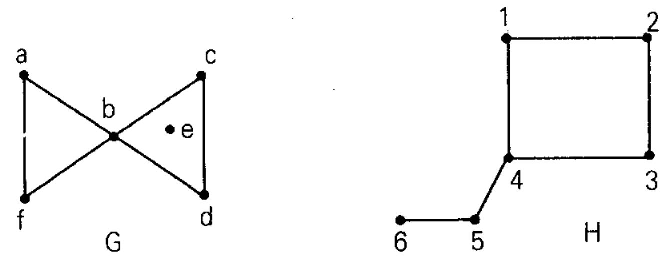
$x_1 \leftrightarrow a,\ y_1 \leftrightarrow b,\ x_2 \leftrightarrow c,\ y_2 \leftrightarrow d,\ x_3 \leftrightarrow e,\ y_3 \leftrightarrow f$

จะเห็นว่าการจับคู่ระหว่างจุดยอดข้างบนนี้เป็นการจับคู่แบบหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง นอกจากนั้น การจับคู่ดังกล่าวยังคงสภาพการเป็นจุดยอดประชิดกัน (นักศึกษาควรลองตรวจสอบดูด้วยตัวเอง) ดังนั้น $K_{3,3}$ และ G เป็นกราฟถอดแบบกัน ■

เห็นได้ชัดว่า ถ้า G และ H เป็นกราฟถอดแบบกันแล้ว G และ H จะต้องมีจำนวนจุดยอดเท่ากันและมีจำนวนเส้นเชื่อมเท่ากัน ถ้าต้องการตรวจสอบว่ากราฟ G และ H เป็นกราฟถอดแบบกันหรือไม่ วิธีหนึ่งที่จะทำได้คือตรวจสอบฟังก์ชันซึ่งส่งจุดยอดของกราฟ G ไปยังจุดยอดของกราฟ H ที่เป็นไปได้ทั้งหมด นั่นคือตรวจสอบการจับคู่แบบสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งที่เป็นไปได้ทั้งหมด และจะต้องตรวจสอบดูว่ามีการจับคู่หรือมีฟังก์ชันใดบ้างที่คงสภาพการเป็นจุดยอดประชิดกัน ถ้าพบฟังก์ชันใดมี

สมบัติดังกล่าว แสดงว่ากราฟ G และ H เป็นกราฟถอดแบบกัน แต่ถ้าไม่พบฟังก์ชันที่มีสมบัติดังกล่าวหลังจากที่ตรวจสอบครบหมดทุกฟังก์ชันแล้ว แสดงว่ากราฟ G และ H ไม่เป็นกราฟถอดแบบกัน ถ้ากราฟ G และ H ต่างก็มีจุดยอด n จุด จะมีฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจากเซตของจุดยอดใน G ไปยังเซตของจุดยอดใน H ที่เราจะต้องตรวจสอบทั้งหมด n! ฟังก์ชัน ซึ่งถ้า n มีขนาดใหญ่มาก ๆ แล้ว การตรวจสอบด้วยวิธีนี้จะไม่สะดวกเพราะเสียเวลามาก แต่จนกระทั่งปัจจุบันนี้ก็ยังไม่มีวิธีใดที่ดีกว่านี้ในการตรวจสอบว่ากราฟทั้งสองเป็นกราฟถอดแบบกัน อย่างไรก็ตาม ถ้ากราฟทั้งสองไม่เป็นกราฟถอดแบบกันแล้ว เรามีวิธีง่าย ๆ สำหรับตรวจสอบว่ากราฟทั้งสองนั้นไม่เป็นกราฟถอดแบบกัน เราทำได้โดยหาสมบัติซึ่งกราฟหนึ่งมีแต่อีกกราฟหนึ่งไม่มี สมบัติเหล่านี้ได้แก่สมบัติที่กราฟทั้งสองควรจะมีเหมือนกันถ้ากราฟทั้งสองนั้นเป็นกราฟถอดแบบกัน เราจะเรียกสมบัติเหล่านี้ว่า **สิ่งไม่แปรเปลี่ยน** (invariant) ภายใต้การถอดแบบ ตัวอย่างของสิ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การถอดแบบได้แก่ การมีจำนวนจุดยอดเท่ากัน การมีจำนวนเส้นเชื่อมเท่ากันซึ่งได้กล่าวไปแล้วในตอนต้น นอกจากนี้เรายังอาจตรวจสอบได้จากดีกรีของจุดยอดแต่ละจุด ตรวจสอบได้จากสมบัติของการเชื่อมโยง ตรวจสอบจำนวนส่วนประกอบ ตรวจสอบลักษณะของกราฟย่อย และตรวจสอบลักษณะของคอมพลีเมนต์ของกราฟเหล่านั้น เป็นต้น

ตัวอย่าง 8.2.3 พิจารณากราฟ G และ H ในรูป 8.2.3



รูป 8.2.3

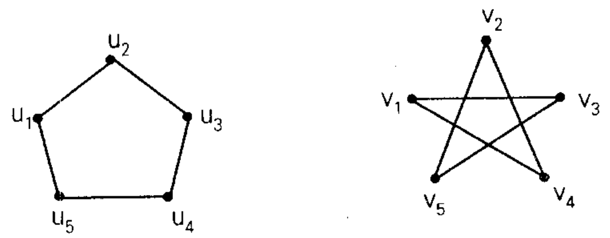
จะเห็นว่า G และ H ไม่เป็นกราฟถอดแบบกัน เราสามารถแสดงให้เห็นจริงได้โดยอ้างเหตุผลข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้

1. G เป็นกราฟไม่เชื่อมโยงแต่ H เป็นกราฟเชื่อมโยง
2. G มีจุดยอดซึ่งดีกรี 4 คือจุดยอด b แต่ H ไม่มีจุดยอดซึ่งมีดีกรี 4 เลย
3. G มีส่วนประกอบสองส่วน แต่ H มีส่วนเดียว
4. G มีกราฟย่อยที่เป็นสามเหลี่ยม แต่ H ไม่มี
5. คอมพลีเมนต์ของ G มีจุดยอดที่มีดีกรี 5 แต่คอมพลีเมนต์ของ H ไม่มีจุดยอดซึ่งมีดีกรี 5 เลย (ควรลองตรวจสอบดู)

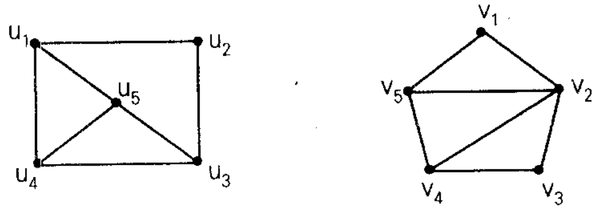
แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณากราฟแต่ละคู่ต่อไปนี้ว่าเป็นกราฟถอดแบบกันหรือไม่ ถ้าเป็น จงเขียนความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างจุดยอดของกราฟทั้งสองนั้น ถ้าไม่เป็นจงให้เหตุผล

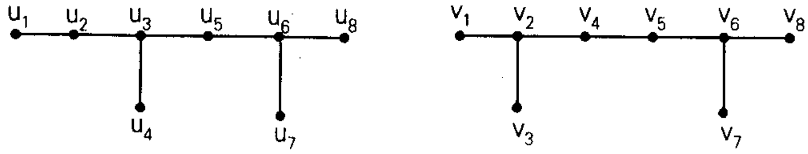
ก.



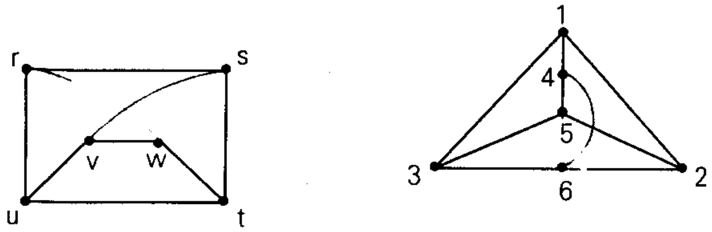
ข.



ค.



ง.



2. จงหากราฟอย่างง่ายทั้งหมดซึ่งประกอบด้วยจุดยอด 2 จุดที่ไม่เป็นกราฟถอดแบบกัน

3. จงหากราฟอย่างง่ายทั้งหมดซึ่งประกอบด้วยจุดยอด 3 จุด ที่ไม่เป็นกราฟถอดแบบกัน

8.3 กราฟเชื่อมโยง
Connected Graphs

ปัญหาจำนวนมากจะถามเกี่ยวกับการเดินทางจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งในกราฟ ซึ่งจะโยงไปสู่คำถามว่ากราฟนั้นเป็นชิ้นส่วนเดียวกันหรือไม่ ดังนั้น ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาโครงสร้างพื้นฐานซึ่งเกี่ยวข้องกับสมบัติของกราฟเชื่อมโยง

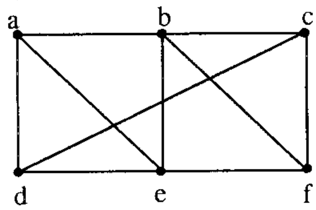
นิยาม 8.3.1

ในกราฟ G **แนวเดิน** (walk) ซึ่งมีความยาวเท่ากับ n คือลำดับที่อยู่ในรูป $u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n = v$ เมื่อ $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1},$

v_n คือจุดยอดและ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ คือเส้นเชื่อมของ G เมื่อ e_i เชื่อมระหว่าง v_{i-1} กับ v_i สำหรับ $i = 1,2,\ldots,n$ โดยมี $u = v_0$ และ $v = v_n$ เป็นจุดปลายของแนวเดิน เรียกแนวเดินนี้ว่า **แนวเดิน-uv** เราจะเรียกแนวเดินซึ่งมีเส้นเชื่อมทุกเส้นแตกต่างกันว่า **รอยเดิน** (trail) และเรียกแนวเดินที่มีจุดยอดแตกต่างกันว่า **วิถี** (path) เรียกแนวเดินที่มีจุดปลายเหมือนกันว่า **แนวเดินปิด** (closed walk) เรียกรอยเดินที่มีจุดปลายเหมือนกันว่า **วงจร** (circuit) และเรียกวิถีที่มีจุดปลายเหมือนกันว่า **วัฏจักร** (cycle)

หมายเหตุ ในกรณีที่ไม่ก่อให้เกิดความสับสน เช่น ในกรณีที่กล่าวถึงกราฟอย่างง่าย เราจะแทนทางเดินด้วยลำดับของจุดยอด $v_0, v_1, v_2,\ldots,v_n$ หรือแทนด้วยลำดับของเส้นเชื่อม $e_1, e_2, \ldots, e_n$ และจะกล่าวว่าทางเดินนั้นผ่านจุดยอด $v_0, v_1,\ldots, v_n$ หรือกล่าวว่าทางเดินนั้นผ่านเส้นเชื่อม $e_1, e_2, \ldots, e_n$

ตัวอย่าง 8.3.1 พิจารณากราฟในรูป 8.3.1 จะพบว่า a, b, f, c, d เป็นวิถี-ad ซึ่งมีความยาวเท่ากับ 4 ส่วน a, b, c, f, b, e, d เป็นรอยเดิน-ad ซึ่งมีความยาวเท่ากับ 6 แต่ไม่เป็นวิถีเนื่องจากมีจุดยอด b ซ้ำกัน a, b, e, f, c, b, e, d เป็นแนวเดิน-ad ซึ่งมีความยาวเท่ากับ 7 แต่ไม่เป็นรอยเดินเนื่องจากมีเส้นเชื่อม {b,e} ซ้ำกัน และไม่เป็นวิถีเนื่องจากมีจุดยอด b และ e ซ้ำกัน a, b, f, c, d, a เป็นวัฏจักร a, b, c, f, b, e, d, a เป็นวงจร และ a, b, e, f, c, b, e, d เป็นแนวเดินปิด ■

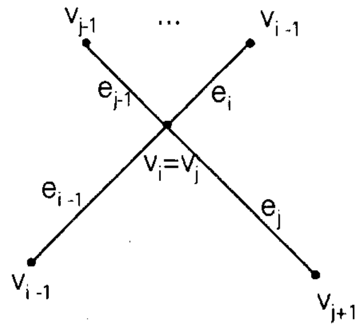


รูป 8.3.1

ทฤษฎีบท 8.3.1

ถ้ามีรอยเดิน-uv จะต้องมีวิถี-uv

พิสูจน์ สมมุติว่า $u = v_o, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n = v$ เป็นรอยเดิน-uv ถ้าจุดยอดทุกจุดในรอยเดิน-uv แตกต่างกัน รอยเดิน-uv นั้นก็คือวิถี-uv ดังนั้นเราจะสมมุติว่ามีจุดยอดบางจุดในรอยเดิน-uv เหมือนกัน เช่น สมมุติว่าจุดยอด $v_i = v_j$ เมื่อ $i < j$ ดังแสดงในรูป 8.3.2 ถ้าเราตัด $e_i, v_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, v_j$ ออกจากรอยเดิน-uv เดิม ส่วนที่เหลือจะยังคงเป็นรอยเดินจาก u ถึง v เช่นเดิมแต่จะสั้นกว่า



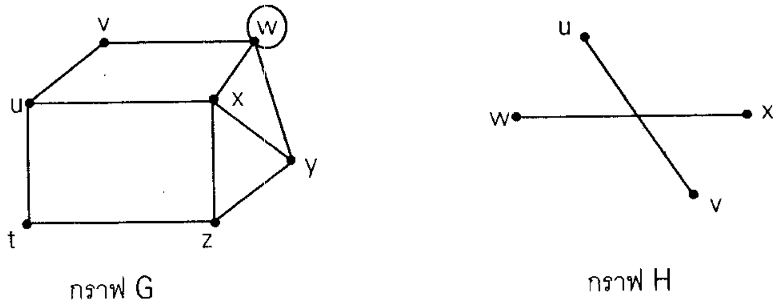
รูป 8.3.2

ถ้ารอยเดิน-uv ที่เหลือมีจุดยอดแตกต่างกันทั้งหมด แสดงว่าเราได้วิถี-uv ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของรอยเดิน-uv เดิม ถ้าส่วนที่เหลือยังคงมีจุดยอดซ้ำกันอีก เราจะต้องทำการตัดในทำนองเดียวกันนี้ซ้ำอีก แต่เนื่องจากจำนวนจุดยอดมีจำนวนจำกัดขบวนการดังกล่าวจะต้องสิ้นสุดที่ตอนใดตอนหนึ่ง นั่นคือ ในที่สุดเราจะได้วิถี-uv ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของรอยเดิน-uv

นิยาม 8.3.2

เราจะกล่าวว่ากราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง ถ้าจุดยอดทุกคู่ของ G มีวิถีเชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสองนั้น

ตัวอย่าง 8.3.2 กราฟ G ในรูป 8.3.3 เป็นกราฟเชื่อมโยง เพราะเราสามารถหาวิถีระหว่างจุดยอดแต่ละคู่ได้เสมอ



รูป 8.3.3

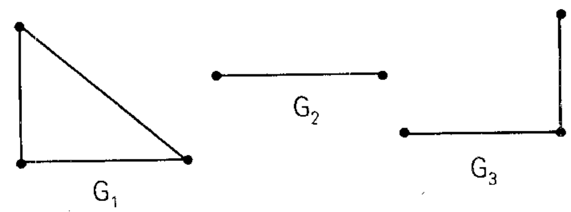
ส่วน H ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง เนื่องจากไม่มีวิถีเชื่อมระหว่างจุดยอดบางคู่ เช่น ไม่มีวิถีระหว่างจุดยอด u และ x ■

นิยาม 8.3.3

> **ส่วนประกอบ** (Component) ของกราฟ G คือกราฟย่อยของ G ที่ใหญ่ที่สุดที่เป็นกราฟเชื่อมโยง

หมายเหตุ เราจะเรียก H ว่าเป็นส่วนประกอบของกราฟ G ก็ต่อเมื่อ H เป็นกราฟย่อยของ G และ H ไม่เป็นกราฟย่อยของกราฟย่อยใดซึ่งเป็นกราฟเชื่อมโยง กราฟ G ในรูป 8.3.4 ข้างล่างนี้มีส่วนประกอบสามส่วนคือ ส่วนประกอบ G_1, G_2 และ G_3

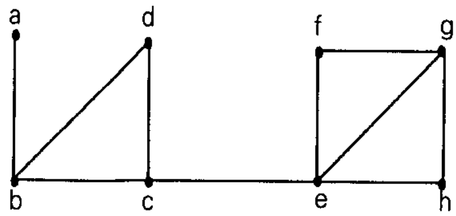
รูป 8.3.4 กราฟ G:



นิยาม 8.3.4

จุดตัด (cut point) ของกราฟคือจุดยอดซึ่งเมื่อลบออกพร้อมกับเส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอดนั้นแล้วทำให้กราฟเดิมกลายเป็นกราฟซึ่งมีจำนวนส่วนประกอบเพิ่มขึ้น และจะเรียกเส้นเชื่อมว่า **เส้นเชื่อมตัด** (cut edge) หรือบางครั้งเรียกว่า **สะพาน** (bridge) ถ้าเส้นเชื่อมนั้นเป็นเส้นเชื่อมของกราฟซึ่งเมื่อถูกตัดออกแล้วทำให้กราฟเดิมมีจำนวนส่วนประกอบเพิ่มขึ้น

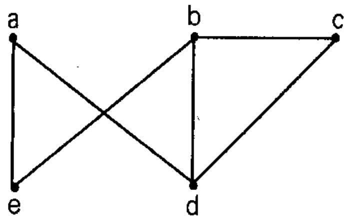
ตัวอย่าง 8.3.3 จุดยอด b, c และ e ในรูป 8.3.5 เป็นจุดตัด เส้นเชื่อม {a,b} และเส้นเชื่อม {c,e} เป็นเส้นเชื่อมตัดหรือเป็นสะพาน



รูป 8.3.5

แบบฝึกหัด

1. จากกราฟที่กำหนดให้นี้ จงพิจารณาว่าลำดับของจุดยอดที่กำหนดให้ในข้อต่อไปนี้ ข้อใดเป็นแนวเดิน ข้อใดเป็นรอยเดิน ข้อใดเป็นวิถี ข้อใดเป็นวงจร และข้อใดเป็นวัฏจักร



ก. a, e, b, c, d, b

ข. a,e,a,d,b,c,d

ค. e,b,c,d,b,e

ง. c,b,e,a,d,c

2. จากกราฟที่กำหนดให้ จงพิจารณาว่าแนวเดินในข้อใดเป็นรอยเดิน วิถี วงจร หรือวัฏจักร หรือเป็นเพียงแนวเดินเท่านั้น

ก. $v_1e_1v_2e_3v_3e_4v_3e_5v_4$

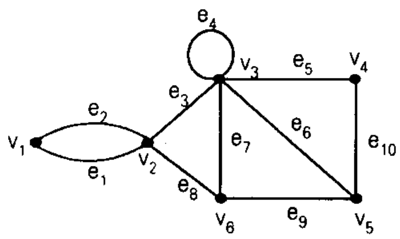
ข. $e_1e_3e_5e_5e_6$

ค. $v_2v_3v_4v_5v_3v_6v_2$

ง. $v_2v_3v_4v_5v_6v_2$

จ. $v_2v_3v_4v_5v_6v_3v_2$

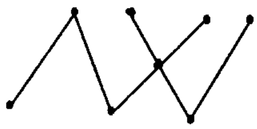
ฉ. v_1



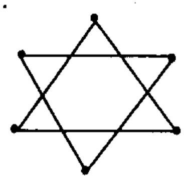
3. กราฟในข้อใดต่อไปนี้เป็นกราฟเชื่อมโยง

ก.

ข.



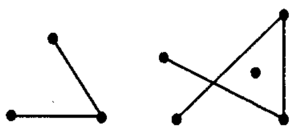
ค.



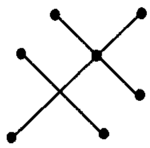
4. จงหาจำนวนส่วนประกอบของกราฟในข้อ -.

5. จงหาจำนวนส่วนประกอบของกราฟต่อไปนี้

ก.



ข.



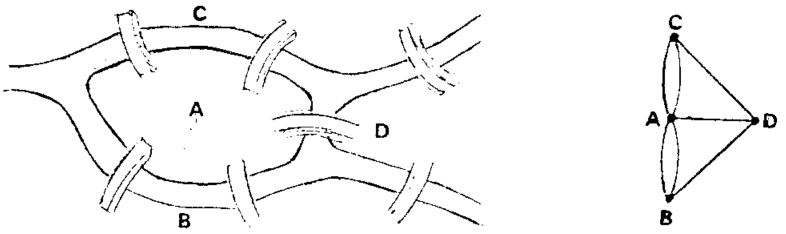
8.4 ออยเลอเรียนกราฟ

Eulerian Graphs

มีเมือง ๆ หนึ่งชื่อเมืองโคนิกส์เบริก (Konigsberg) ของชาวปรัสเซีย (Prussia) ปัจจุบันชื่อ แคลินนินการ์ด (Kaliningrad) ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของประเทศรัสเซีย เมืองนี้ถูกแบ่งออกเป็นสี่ส่วน คือ A, B, C และ D โดยแม่น้ำพรีเกล (Pregel) ซึ่งแยกออกเป็นสองสาขาดังในรูป 8.4.1(ก)

มีสะพานเจ็ดสะพานเชื่อมระหว่างผืนดินแต่ละส่วนเหล่านั้น มีปัญหาที่ถามสืบกันมาว่า

เป็นไปได้หรือไม่ที่ชาวเมืองจะเดินท่องเที่ยวรอบเมือง โดยการข้ามสะพานทุกสะพานเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมายังจุดเริ่มต้นเดิม



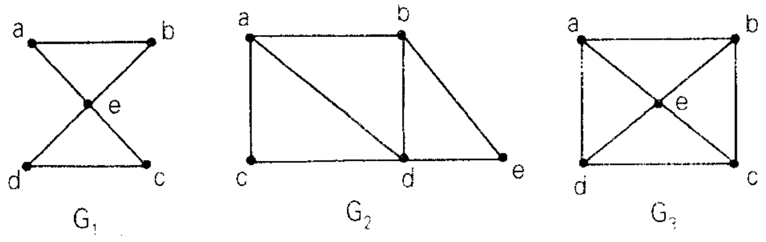
รูป 8.4.1 (ก) (ข)

ออยเลอร์ได้ศึกษาปัญหานี้ โดยศึกษาจากกราฟที่ได้จากการแทนผืนดินทั้งสี่บริเวณด้วยจุดยอด A, B, C และ D และแทนสะพานด้วยเส้นเชื่อมซึ่งเชื่อมผืนดินทั้งสองนั้น กราฟที่ได้มีลักษณะดังแสดงในรูป 8.4.1(ข) ก่อนตอบคำถามนี้ เราจะต้องศึกษานิยามและทฤษฎีบทต่อไปนี้

นิยาม 8.4.1

วงจรออยเลอร์ ในกราฟ G คือวงจรซึ่งผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของ G
รอยเดินออยเลอร์ ใน G คือรอยเดินซึ่งผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นใน G
เรียกกราฟที่มีวงจรออยเลอร์ว่า **ออยเลอเรียนกราฟ**

ตัวอย่าง 8.4.1 กราฟในรูปข้างล่างนี้ กราฟใดมีวงจรออยเลอร์ กราฟใดไม่มี และกราฟใดมีรอยเดินออยเลอร์



รูป 8.4.2

กราฟ G_1 มีวงจรออยเลอร์ เช่น a, e, c, d, e, b, a ดังนั้น G_1 เป็นออยเลอเรียนกราฟ กราฟ G_2 มีรอยเดินออยเลอร์ เช่น a, c, d, e, b, d, a, b ผู้อ่านควรลองสำรวจกราฟ G_3 จะพบว่ากราฟ G_3 ไม่มีรอยเดินออยเลอร์

ข้อสังเกต จะเห็นว่ากราฟใดที่มีวงจรออยเลอร์ ดีกรีของจุดยอดทุก ๆ จุดจะต้องเป็นจำนวนคู่ ทั้งนี้เนื่องจากทุกครั้งที่วงจรผ่านจุดยอด a ซึ่งไม่ใช่จุดเริ่มต้นแล้ว จะทำให้ดีกรีของจุดยอด a เพิ่มขึ้นสอง คือนับดีกรีเป็นหนึ่งเมื่อวงจรผ่านเส้นเชื่อมที่เข้าสู่จุดยอด a และนับดีกรีอีกครั้งหนึ่งเมื่อวงจรผ่านเส้นเชื่อมที่ออกจากจุด a ไปยังจุดยอดอื่น ดังนั้น จุดยอดเหล่านั้นจะต้องมีดีกรีเป็นจำนวนคู่ ส่วนจุดเริ่มต้นก็จะมีดีกรีเป็นจำนวนคู่เช่นกัน เพราะวงจรจะต้องออกจากจุดเริ่มต้นและสิ้นสุดวงจรที่จุดเดียวกัน

ทฤษฎีบท 8.4.1

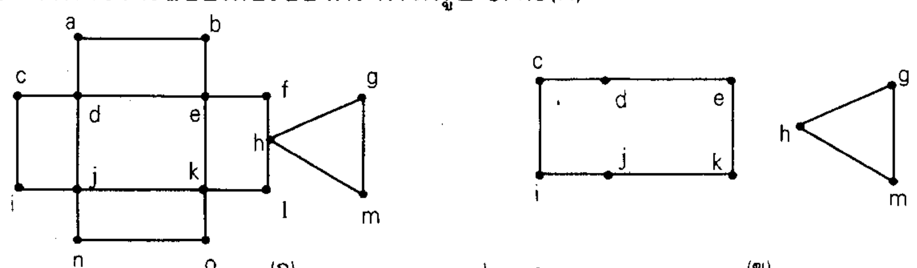
> ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง กราฟ G มีวงจรออยเลอร์ก็ต่อเมื่อจุดยอดทุก ๆ จุดมีดีกรีคู่

พิสูจน์ ขั้นแรกสมมุติให้ G เป็นกราฟซึ่งมีวงจรออยเลอร์ ดังนั้น จุดยอดทุกจุดของ G มีดีกรีเป็นจำนวนคู่ เนื่องจากเหตุผลที่ได้กล่าวแล้วในข้อสังเกตข้างบนนี้

ในทางกลับกัน สมมุติให้จุดยอดทุกจุดของ G มีดีกรีคู่ จะต้องแสดงว่า G มีวงจรออยเลอร์ เราจะพิสูจน์โดยการอธิบายขั้นตอนวิธีสร้างวงจรออยเลอร์ดังต่อไปนี้ ในขั้นแรก เราเลือกจุดยอดจุดหนึ่งเป็นจุดเริ่มต้น สมมุติว่าเลือกจุดยอด a เป็นจุดเริ่มต้น ขั้นต่อไปเลือกเส้นเชื่อมใด ๆ ที่กระทบกับจุดยอด a และที่จุดยอดซึ่งเป็นจุดปลายอีกข้างหนึ่งของเส้นเชื่อมนี้ เลือกเส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอดนั้น การที่จุด

ยอดแต่ละจุดมีดีกรีเป็นจำนวนคู่ ทำให้เราสามารถกระทำเช่นนี้ต่อไปได้เรื่อย ๆ จะได้รอยเดินที่มีความยาวเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ในที่สุดรอยเดินนั้นจะต้องกลับมาที่จุดเริ่มต้น a ทั้งนี้เนื่องจากจุดยอดของกราฟมีจำนวนจำกัด ดังนั้นเราได้วงจรหนึ่ง ถ้าวงจรนี้ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของ G วงจรที่ได้จะเป็นวงจงออยเลอร์ที่ต้องการ ถ้าวงจรดังกล่าวผ่านเส้นเชื่อมไม่ครบทุกเส้น เราให้ H เป็นกราฟย่อยของ G ซึ่งได้จากการตัดเส้นเชื่อมที่ถูกใช้แล้วออกและตัดจุดยอดซึ่งไม่ประชิดกับจุดยอดใดที่เหลือ ดีกรีของจุดยอดทุกจุดใน H ยังคงเป็นจำนวนคู่ ทั้งนี้เนื่องจากจุดยอดทุกจุดใน G มีดีกรีเป็นจำนวนคู่ เมื่อตัดเส้นเชื่อมที่ถูกใช้ในวงจรออก จุดยอดที่วงจรผ่านจะมีดีกรีลดลงเป็นจำนวนคู่ ดังนั้นเส้นเชื่อมที่เหลือที่กระทบกับจุดยอดนั้นจะยังคงเป็นจำนวนคู่ นอกจากนี้เราจะพบว่า H ไม่จำเป็นจะต้องเป็นกราฟเชื่อมโยง แต่เนื่องจาก G เป็นกราฟเชื่อมโยง ดังนั้นจะต้องมีจุดยอดใน H ที่เป็นจุดยอดร่วมกับจุดยอดในวงจรที่ถูกตัดออก สมมุติให้ w เป็นจุดยอดร่วมดังกล่าว เราจะสร้างวงจรซึ่งเริ่มต้นที่ w โดยใช้ขบวนการสร้างเช่นเดียวกับที่กล่าวไปแล้วในตอนสร้างวงจรซึ่งเริ่มต้นที่จุดยอด a แทรกวงจรที่ได้ใหม่นี้ลงในวงจรแรกที่จุดร่วม w เราได้วงจรใหม่ซึ่งมีความยาวเพิ่มขึ้น ถ้าวงจรใหม่นี้ไม่ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของ G เราจะทำขบวนการเช่นเดิมนี้ซ้ำอีก จนกว่าจะได้วงจรใหม่ซึ่งผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของ G นั่นคือ เราได้วงจรออยเลอร์ที่ต้องการ

ตัวอย่าง 8.5.2 จงหาวงจรออยเลอร์ของกราฟในรูป 8.4.3(ก)



รูป 8.4.3

วิธีทำ จะเห็นว่ากราฟที่กำหนดให้นั้นเป็นกราฟเชื่อมโยงและดีกรีของจุดยอดทุก ๆ จุดเป็นจำนวนคู่ แสดงว่าจะต้องมีวงจรออยเลอร์ เราหาวงจรออยเลอร์ตามขั้นตอนต่อไปนี้

เลือกจุดยอดจุดหนึ่งเป็นจุดเริ่มต้น ในที่นี้เราเลือกจุด a เป็นจุดเริ่มต้นแล้วเดินไปตามวงจร

a, d, j, n, o, k, l, h, f, e, b, a ....(8.4.1)

ตอนนี้เรากลับมาอยู่ที่จุดเริ่มต้น a จะเห็นว่าเมื่อจุดยอดทุกจุดมีดีกรีเป็นจำนวนคู่ทำให้เราสามารถสร้างรอยเดินซึ่งเข้าสู่จุดหนึ่งและออกจากจุดนั้นได้เสมอและในที่สุดก็จะกลับมาที่ a ถ้าวงจรนี้ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นแสดงว่าวงจรนี้เป็นวงจรออยเลอร์ที่ต้องการ แต่ในที่นี้วงจรไม่ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้น ดังนั้นเราพิจารณากราฟย่อยของเส้นเชื่อมที่ไม่อยู่ในวงจร (8.4.1) ซึ่งก็คือกราฟที่แสดงในรูป 8.4.3 (ข) จะเห็นว่าส่วนที่เหลือเป็นกราฟไม่เชื่อมโยงแต่จุดยอดทุกจุดยังคงมีดีกรีเป็นจำนวนคู่ และกราฟแต่ละส่วนนี้จะต้องมีจุดยอดร่วมกับจุดยอดที่ใช้ไปแล้วในวงจร (8.4.1) เช่น จุด d และจุด h เป็นต้น ดังนั้นถ้าเราสร้างวงจรโดยเริ่มจากจุด d และ h จะได้วงจรสองวงจรคือ d, c, i, j, k, e, d และ h, g, m, h ดังนั้นถ้าเรานำวงจรทั้งสองนี้แทรกเข้าไปในวงจร (8,4,1) ที่จุด d และ h เราจะได้วงจรใหม่ คือ

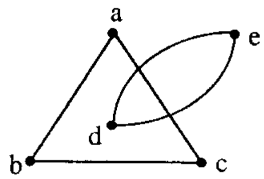
a, d, c, i, j, k, e, d, j, n, o, k, l, h, g, m, h, f, e, b, a

ซึ่งเป็นวงจรออยเลอร์ตามต้องการเพราะผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟที่กำหนดให้

จะเห็นว่าปัญหาของชาวเมืองโคนิกส์เบริกก็คือการหาวงจรออยเลอร์ของกราฟในรูป 8.4.1(ข) นั่นเอง จากทฤษฎีบท 8.4.1 จะพบว่ากราฟดังกล่าวไม่มีวงจรออยเลอร์ เพราะมีจุดยอดบางจุดที่มีดีกรีคี่

หมายเหตุ ในทฤษฎีบท 8.4.1 เงื่อนไขที่กล่าวว่า G เป็นกราฟเชื่อมโยง เป็นเงื่อนไขที่จำเป็น เพราะถ้าขาดเงื่อนไขข้อนี้แล้วทฤษฎีบทอาจไม่เป็นจริง

ตัวอย่าง 8.4.3 จุดยอดทุกจุดของกราฟในรูป 8.4.4 มีดีกรีคู่ แต่ไม่เป็นออยเลอเรียน เพราะไม่มีวงจรออยเลอร์ ทั้งนี้เนื่องจากเป็นกราฟไม่เชื่อมโยง ■



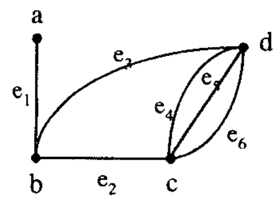
รูป 8.4.4

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงเงื่อนไขของกราฟที่จะมีรอยเดินออยเลอร์ (ไม่จำเป็นต้องเป็นรอยเดินปิด) โดยจะเว้นการพิสูจน์ไว้ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 8.4.2

ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง กราฟ G มีรอยเดินออยเลอร์ก็ต่อเมื่อจำนวนจุดยอดที่มีดีกรีคี่มีจำนวนเท่ากับ 0 หรือ 2

ตัวอย่าง 8.4.4 กราฟในรูป 8.4.1(ข) ไม่มีรอยเดินออยเลอร์ แต่กราฟในรูป 8.4.5 มีรอยเดินออยเลอร์จาก a ไปยัง b เช่นรอยเดิน a, e_1, b, e_3, d, e_4, c, e_5, d, e_6, c, e_2, b

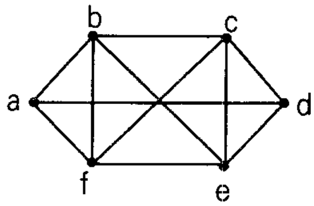


รูป 8.4.5

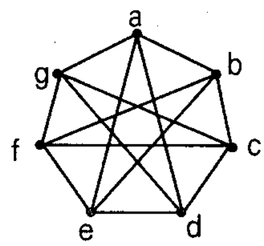
แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณากราฟต่อไปนี้ ถ้ากราฟใดมีวงจรออยเลอร์หรือรอยเดินออยเลอร์ จงหาวงจรออยเลอร์หรือรอยเดินออยเลอร์นั้น

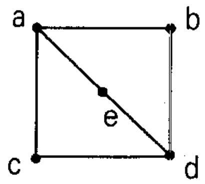
ก.



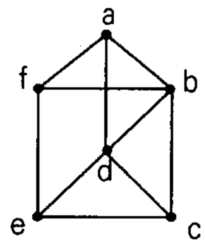
ข.



ค.



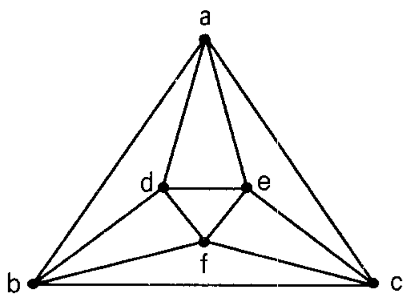
ง.

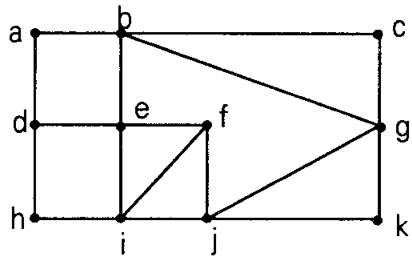


2. ถ้า K_n มีวงจรออยเลอร์แล้ว n จะมีค่าเป็นเท่าใด

3. ถ้า $K_{m,n}$ มีวงจรออยเลอร์แล้ว m และ n จะต้องมีค่าเป็นเท่าใด

4. จงพิจารณากราฟในรูปซ้ายมือข้างล่างนี้ว่าเป็นออยเลอเรียนกราฟหรือไม่ ถ้าเป็นจงหาวงจรออยเลอร์นั้น





5. จงพิจารณากราฟในรูปขวามือข้างบนนี้ว่ามีรอยเดินออยเลอร์หรือไม่ ถ้ามีจงหารอยเดินออยเลอร์นั้น

8.5 **แฮมิลทอเนียนกราฟ**

Hamiltonian Graphs

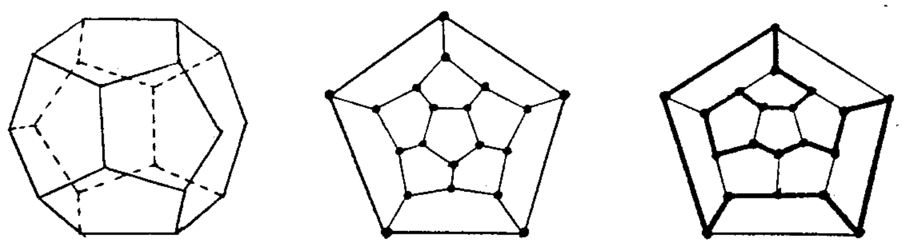
แนวความคิดเกี่ยวกับวงจรแฮมิลตันเกิดขึ้นจากปัญหาการวิจัยดำเนินงาน (operations research) ซึ่งเกี่ยวข้องกับการหาเส้นทาง เช่น หาเส้นทางที่พนักงานขายสินค้าต้องท่องเที่ยวไปตามเมืองต่าง ๆ เพื่อเสนอขายสินค้า เขามักต้องการหาเส้นทางที่ผ่านเมืองทุก ๆ เมืองเพียงครั้งเดียว เพื่อลดค่าใช้จ่ายในการเดินทางให้น้อยที่สุด ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาปัญหาเกียวกับการหาเส้นทางที่มีลักษณะดังกล่าว โดยมีกราฟเป็นแบบจำลองของปัญหา

นิยาม 8.5.1

วัฏจักรแฮมิลตัน ในกราฟ G คือวัฏจักรที่ผ่านจุดยอดทุก ๆ จุดของ G **วิถีแฮมิลตัน** คือวิถีซึ่งผ่านจุดยอดทุก ๆ จุดของ G เรียกกราฟที่มีวัฏจักรแฮมิลตันว่า **แฮมิลทอเนียนกราฟ**

ชื่อวัฏจักรแฮมิลตันนั้นได้จากชื่อของนักคณิตศาสตร์ชาวไอริส ชื่อ Sir William Rowan Hamilton ซึ่งเป็นผู้คิดเกมที่ใช้รูปห้าเหลี่ยมสิบสองหน้า (dodecahedron) ดังแสดงในรูป 8.5.1(ก) รูปห้าเหลี่ยงสิบสองหน้านี้จะมีจุดยอดมุม 20 จุด ให้แต่ละจุดแทนเมืองต่าง ๆ จุดประสงค์ของเกมคือเริ่มที่เมืองใดเมืองหนึ่ง แล้วท่องเที่ยวไปตามเส้นเชื่อมของรูปห้าเหลี่ยมสิบสองหน้า โดยผ่านเมืองอีก 19 เมืองเพียงครั้งเดียวและกลับมาที่เมืองเดิม ถ้ารูปห้าเหลี่ยมสิบสองหน้านั้นทำด้วยยาง เราสามารถดึงยืดออกได้ดังรูป 8.5.1(ข) ดังนั้น จุดประสงค์ของเกมดังกล่าวก็คือการหาวัฏจักรแฮมิลตันของกราฟในรูป 8.5.1(ข) นั่นเอง คำตอบของเกมนี้คือ วัฏจักรซึ่งแสดงด้วยเส้นหนาเข้มในรูป 8.5.1(ค)

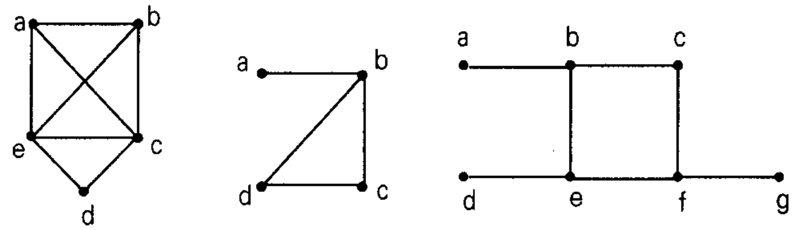
รูป 8.5.1



(ก) (ข) (ค)

ข้อสังเกต เส้นเชื่อมในวัฏจักรแฮมิลตันที่กระทบกับจุดยอดใด ๆ มีเพียงสองเส้นเท่านั้น

ตัวอย่าง 8.5.1 จงหาวัฏจักรแฮมิลตันหรือวิถีแฮมิลตันของกราฟต่อไปนี้



รูป 8.5.2 กราฟ G_1 กราฟ G_2 กราฟ G_3

G_1 มีวัฏจักรแฮมิลตัน คือ a, b, c, d, e, a

G_2 ไม่มีวัฏจักรแฮมิลตันแต่มีวิถีแฮมิลตัน เช่น a, b, c, d

G_3 ไม่มีวัฏจักรแฮมิลตันและไม่มีวิถีแฮมิลตัน เนื่องจากวิถีที่ผ่านจุดยอดทุกจุดจะต้องผ่านจุดยอดบางจุดมากกว่าหนึ่งครั้ง

ข้อสังเกต 1. กราฟบริบูรณ์ K_n เมื่อ $n \geq 3$ มีวัฏจักรแฮมิลตันเสมอ

2. ถ้า G มีวัฏจักรแฮมิลตัน เมื่อเพิ่มเส้นเชื่อมเข้าไปใน G กราฟใหม่ก็ยังคงมีวัฏจักรแฮมิลตัน แสดงว่าเมื่อกราฟยิ่งมีจำนวนเส้นเชื่อมมาก กราฟนั้นก็ยิ่งมีโอกาสที่จะมีวัฏจักรแฮมิลตันมากขึ้นเท่านั้น

เรามีเงื่อนไขที่ใช้ในการพิจารณาว่ากราฟนั้นมีวงจรออยเลอร์หรือไม่ โดยตรวจสอบดีกรีของจุดยอดแต่ละจุด นอกจากนั้น เรายังมีขั้นตอนวิธีสำหรับสร้างวงจรออยเลอร์อย่างเป็นระบบด้วย แต่สำหรับวัฏจักรแฮมิลตันนั้น ยังไม่มีผู้ใดพบเงื่อนไขที่เป็นทั้งเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีวัฏจักรแฮมิลตัน อย่างไรก็ตาม เรายังมีเงื่อนไขที่เป็นเงื่อนไขเพียงพอ นั่นคือมีเงื่อนไขซึ่งเมื่อกราฟนั้นมีสมบัติที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวแล้วเราสรุปได้ทันทีว่ากราฟนั้นไม่มีวัฏจักรแฮมิลตัน ดูทฤษฎีบท 8.5.1 และบทแทรก 8.5.1

ส่วนการหาวัฏจักรแฮมิลตันนั้น ทำได้โดยการพยายามสร้างบางส่วนของวัฏจักรโดยใช้กฎสามข้อข้างล่างนี้ ในระหว่างการดำเนินการดังกล่าว ถ้าประสบกับความล้มเหลวหรือพบข้อขัดแย้งใด ๆ แสดงว่าเราไม่สามารถสร้างวัฏจักรให้ผ่านจุดยอดครบหมดทุกจุดได้โดยไม่ซ้ำจุดยอดเดิมที่ใช้ไปแล้ว นั่นคือไม่มีวัฏจักรแฮมิลตัน กฎทั้งสามข้อได้แก่

กฎข้อที่ 1 ถ้าจุดยอด x มีดีกรีเท่ากับสอง เส้นเชื่อมทั้งสองที่กระทบกับจุดยอด x จะต้องถูกใช้เป็นส่วนของวัฏจักร

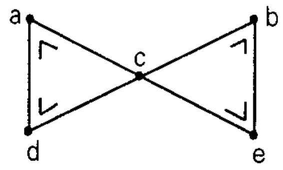
กฎข้อที่ 2 จะต้องไม่สร้างวัฏจักรซึ่งมีจำนวนจุดยอดไม่ครบทุกจุด

กฎข้อที่ 3 เมื่อส่วนของวัฏจักรที่เรากำลังสร้างนั้น ผ่านจุดยอดใดแล้ว เส้นเชื่อมอื่น ๆ ที่กระทบกับจุดยอดนั้นและยังไม่ถูกใช้จะถูกลบออก เพราะว่าเราจะใช้เส้นเชื่อมเหล่านั้นซ้ำอีกไม่ได้

ข้อสังเกต กฎข้อที่ 3 อาจทำให้ดีกรีของจุดยอดบางจุดลดเหลือสอง ซึ่งเราสามารถใช้กฎข้อที่ 1 ซ้ำได้อีก

ตัวอย่าง 8.5.2 จงแสดงว่ากราฟในรูป 8.5.3 ไม่มีวัฏจักรแฮมิลตัน

วิธีทำ เพื่อเป็นการชี้ให้เห็นว่า เส้นเชื่อมได้ถูกใช้ในวงจรนั้น เราจะใช้ส่วนของเส้นตรงสั้น ๆ เขียนกำกับไว้ใกล้ ๆ เส้นเชื่อมนั้น ดังแสดงในรูป 8.5.3 เราสามารถแสดงให้เห็นข้อขัดแย้งได้ด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งในสองวิธีต่อไปนี้



รูป 8.5.3

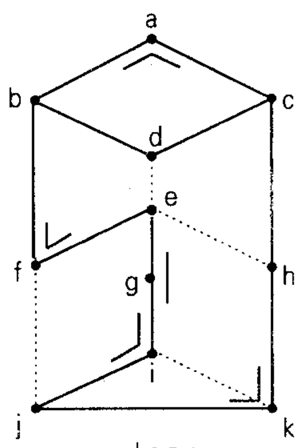
วิธีที่ 1 ใช้กฎข้อที่ 1 ที่จุดยอด a และ d ทำให้ได้ส่วนของวัฏจักรที่ผ่านเส้นเชื่อม {a,c},{a,d} และ {d,c} ซึ่งเป็นวัฏจักรที่ไม่ผ่านจุดยอดทุกจุด เราได้ข้อขัดแย้งกับกฎข้อที่ 2

วิธีที่ 2 ใช้กฎข้อที่ 1 ที่จุดยอด a, b, d และ e จะทำให้วัฏจักรประกอบด้วยเส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอด c มากกว่าสองเส้น ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ทั้งสองวิธีข้างบนนี้แสดงให้เห็นว่ากราฟในรูป 8.5.3 ไม่มีวัฏจักรแฮมิลตัน ■

ตัวอย่าง 8.5.3 จงแสดงว่ากราฟในรูป 8.5.4 ไม่มีวัฏจักรแฮมิลตัน

วิธีทำ เราเริ่มด้วยการใช้กฎข้อที่ 1 ที่จุดยอด a และ g เพราะเป็นจุดยอดที่มีดีกรีสอง ดังนั้นวิถี b, a, c และ วิถี e, g, i จะเป็นส่วนของวัฏจักรที่จะสร้าง ต่อไปพิจารณาจุดยอด i เราทราบแล้วว่าเส้นเชื่อม {g,i} เป็นส่วนหนึ่งของวัฏจักรและเนื่องจากกราฟในรูป 8.5.4 เป็นกราฟสมมาตรเมื่อเทียบกับเส้นเชื่อม {i,j} และ {i,k} ดังนั้นเราเลือกเส้นเชื่อมเส้นใดเส้นหนึ่งในสองเส้นนี้ให้เป็นเส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอด i ในวัฏจักร สมมุติว่าเราเลือกเส้นเชื่อม {i,j} ถ้าเรา



รูป 8.5.4

พบข้อขัดแย้งอันเนื่องมาจากการเลือกเส้นเชื่อม {i,j} เราจะพบข้อขัดแย้งอันเนื่องมาจากการเลือกเส้นเชื่อม {i,k} เช่นกัน

ขั้นต่อไปเราใช้กฎข้อที่ 3 คือ ลบเส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอด i ที่ไม่ถูกใช้ออก นั่นคือลบเส้นเชื่อม {i,k} ที่แสดงด้วยเส้นไข่ปลาออก ซึ่งจะทำให้ดีกรีของจุดยอด k ลดเหลือสอง ดังนั้นตามกฎข้อที่ 1 เราจะต้องใช้เส้นเชื่อมทั้งสองที่เหลือที่กระทบกับจุดยอด k นั่นคือใช้เส้นเชื่อม {j,k} และ {h,k} เมื่อเพิ่มเส้นเชื่อม {j,k} เข้าไปในส่วนของวัฏจักร เราจะต้องลบเส้นเชื่อม {f,j} ออกตามกฎข้อที่ 3 ซึ่งเป็นผลให้ดีกรีของจุดยอด f ลดลงเหลือสอง ดังนั้นเราจะต้องใช้เส้นเชื่อมทั้งสองเส้นที่เหลือที่กระทบกับจุดยอด f คือใช้เส้นเชื่อม {b,f} และ {f,e} การเพิ่มเส้นเชื่อม {f,e} เข้าไปในวงจร บังคับให้เราต้องลบเส้นเชื่อม {e,d} และ {e,h} ออกตามกฎข้อที่ 3 เช่นกัน จะเห็นว่าเกิดข้อขัดแย้งขึ้นที่จุดนี้ เพราะถ้าเราพิจารณาที่จุดยอด d ซึ่งขณะนี้มีดีกรีเท่ากับสอง แสดงว่าเราจะต้องใช้เส้นเชื่อม {b,d} และ {c,d} ซึ่งจะทำให้เกิดวัฏจักรย่อยคือวัฏจักร a, b, d, c, a ซึ่งขัดกับกฎข้อที่ 2 นอกจากนี้เรายังใช้เส้นเชื่อมทั้งสามเส้นที่จุดยอด b อีกด้วย ซึ่งเป็นไปไม่ได้ แสดงว่ากราฟในรูป 8.5.4 ไม่มีวัฏจักรแฮมิลตัน ■

ทฤษฎี 8.5.1 Ore's Theorem (O. Ore 1960)

ให้ G เป็นกราฟ[illegible]ซึ่งมีจุดยอด [illegible]
ยอดใด ๆ ซึ่งไม่ประชิดกัน [illegible] deg(x) [illegible]
จะมีวัฏจักรแฮมิลตัน

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์บทกลับของทฤษฎีบทนี้ นั่นคือเราสมมุติให้ G เป็นกราฟซึ่งไม่มีวัฏจักรแฮมิลตันและจะแสดงว่า

$$\deg_G(x) + \deg_G(y) < n$$

เมื่อ $deg_G(a)$ หมายถึงดีกรีของจุดยอด a ใน G ถ้าเราเพิ่มเส้นเชื่อมซึ่งไม่ใช่เส้นเชื่อม $\{x,y\}$ เข้าไปในกราฟ G ทีละเส้น ในที่สุดเราจะมาถึงจุดหนึ่งที่เราได้กราฟ H ซึ่งยังคงไม่มีวัฏจักรแฮมิลตัน แต่เมื่อเพิ่มเส้นเชื่อม $\{x,y\}$ เข้าไปใน H แล้ว จะได้กราฟใหม่ที่มีวัฏจักรแฮมิลตัน เหตุที่ทำเช่นนี้ได้เพราะเราทราบว่ากราฟบริบูรณ์มีวัฏจักรแฮมิลตันเสมอ การเพิ่มเส้นเชื่อมเข้าไปทีละเส้นรวมทั้งเส้นเชื่อม $\{x,y\}$ ในที่สุดเราจะได้กราฟบริบูรณ์ วัฏจักรแฮมิลตันที่ได้จะต้องผ่านเส้นเชื่อม $\{x,y\}$ สมมุติว่าวัฏจักรแฮมิลตันนี้คือลำดับของจุดยอด

$$x, y, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x$$

เมื่อจุดยอด a_i แต่ละจุดแตกต่างกัน นอกจากนี้เรายังพบว่า ถ้า $\{y, a_i\}$ เมื่อ $i > 1$ เป็นเส้นเชื่อมในกราฟ H แล้ว $\{x, a_{i-1}\}$ จะไม่เป็นเส้นเชื่อมใน H เพราะถ้า $\{x, a_{i-1}\}$ เป็นเส้นเชื่อมใน H แล้ว ลำดับของจุดยอด

$$y, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-2}, x, a_{i-1}, a_{i-2}, \dots, a_1, y$$

จะเป็นวัฏจักรแฮมิลตันใน H ซึ่งขัดกับความจริงที่ว่า H ไม่มีวัฏจักรแฮมิลตัน ดังนั้น

$$deg_H(x) + deg_H(y) < n \quad \text{แสดงว่า} \quad deg_G(x) + deg_G(y) < n$$

ตามที่เราต้องการพิสูจน์ ■

ตัวอย่าง 8.5.4 กราฟในรูป 8.5.5(ก) มีวัฏจักรแฮมิลตัน ทั้งนี้เนื่องจากผลบวกของดีกรีของจุดยอดแต่ละคู่มากกว่า 5

(ก) (ข)

รูป 8.5.5

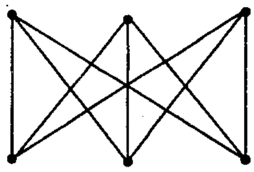
ในรูป 8.5.5(ข) แสดงให้เห็นว่าบทกลับของทฤษฎีบท 8.5.1 ไม่เป็นจริง นั่นคือ ถ้ากราฟมีวัฏจักรแฮมิลตันแล้ว ผลบวกของดีกรีของจุดยอดแต่ละคู่ที่ไม่ประชิดกันไม่จำเป็นจะต้องมากกว่าจำนวนจุดยอดทั้งหมด ผลที่ได้จากทฤษฎีบท 8.5.1 คือบทแทรก 8.5.1

บทแทรก 8.5.1 Dirac's Theorem (G. A. Dirac 1952)

ให้ G เป็นกราฟอย่างง่ายซึ่งมีจุดยอด $n \geq 3$ จุด ถ้าจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีอย่างน้อย $\frac{n}{2}$ แล้ว G จะมีวัฏจักรแฮมิลตัน

ตัวอย่าง 8.5.5 กราฟในรูป 8.5.6 มีวัฏจักรแฮมิลตัน ทั้งนี้เนื่องจากจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเท่ากับ $\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$

รูป 8.5.6



ทฤษฎีบท 8.5.2

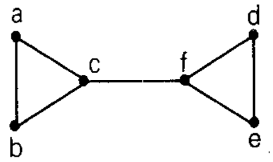
ให้ G เป็นกราฟอย่างง่ายซึ่งมีจุดยอด n จุด สำหรับ x และ y ที่เป็นจุดยอดใด ๆ ถ้า $\deg(x) + \deg(y) \geq n - 1$ แล้วกราฟ G จะมีวิถีแฮมิลตันเสมอ

เราจะเว้นไม่พิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ ผู้อ่านที่สนใจสามารถศึกษาวิธีพิสูจน์ได้จากหนังสือ Element of Discrete Mathematics ของ C. L. Liu

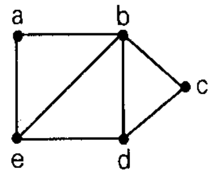
แบบฝึกหัด

1. กราฟในข้อต่อไปนี้เป็นแฮมิลทอเนียนกราฟหรือไม่ ถ้าเป็น จงหาวัฏจักรแฮมิลตันของกราฟนั้น

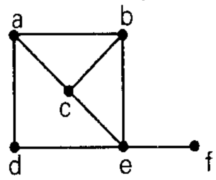
ก.



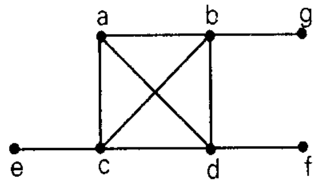
ข.



ค.

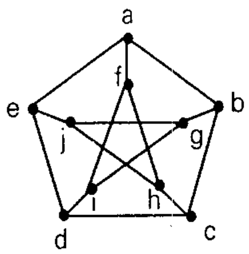


ง.

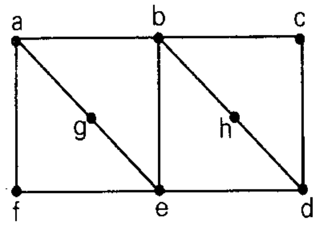


2. จงแสดงว่ากราฟข้างล่างนี้ไม่เป็นแฮมิลทอเนียนกราฟ

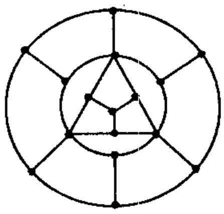
ก.



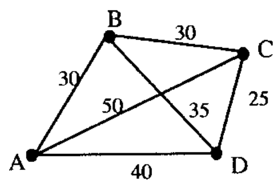
ข.



3. จงแสดงว่ากราฟข้างล่างนี้ไม่มีวิถีแฮมิลตัน



4. รูปนี้แสดงแผนที่ของเมือง A, B, C, D และระยะทางเป็นกิโลเมตรระหว่างแต่ละเมือง สมมุตว่าพนักงานขายสินค้าต้องการเดินทางไปยังแต่ละเมืองเพียงครั้งเดียวโดยเริ่มต้นและสุดสิ้นการเดินทางที่เมือง A จงหาเส้นทางที่จะทำให้

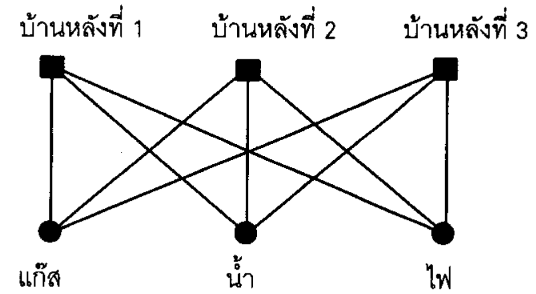


เขาเดินทางสั้นที่สุด

8.6 กราฟเชิงระนาบ

Planar Graphs

พิจารณาปัญหาการต่อท่อแก๊ส ท่อน้ำ และท่อสายไฟบนพื้นดินเข้าบ้านสามหลังดังในรูป 8.6.1 เป็นไปได้หรือไม่ที่จะต่อท่อเหล่านั้นโดยไม่มีท่อใดไม่ตัดกัน ปัญหานี้สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยกราฟ $K_{3,3}$ ดังนั้นคำถามในปัญหาการต่อท่อนี้คือ เป็นไปได้หรือไม่ที่จะเขียนกราฟ $K_{3,3}$ บนระนาบ โดยไม่ให้เส้นเชื่อมต่าง ๆ ของกราฟตัดกัน



รูป 8.6.1

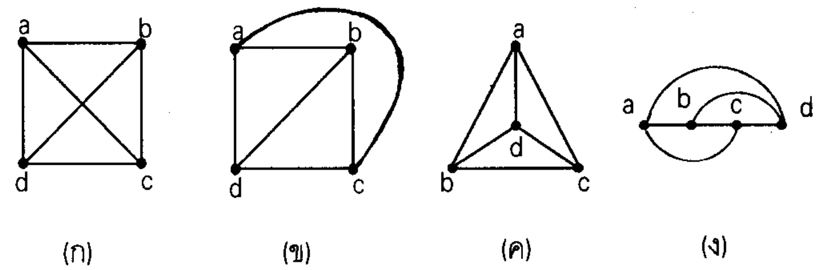
ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาความเป็นไปได้ของการเขียนกราฟบนระนาบโดยไม่ให้เส้นเชื่อมใดตัดกันเลย เราจะเน้นศึกษาเฉพาะกราฟอย่างง่ายเท่านั้น สำหรับมัลติกราฟหรือกราฟเทียมนั้นเราสามารถยุบเส้นเชื่อมพหุให้เป็นเส้นเชื่อมเดียวหรือตัดห่วงออกแล้วแต่กรณี แล้วศึกษากราฟผลลัพธ์ว่าเป็นกราฟเชิงระนาบหรือไม่ ถ้าเป็น เราสามารถหากราฟระนาบได้ แล้วเพิ่มเส้นเชื่อมพหุหรือห่วงเข้าไปก็จะได้กราฟระนาบของมัลติกราฟหรือกราฟเทียมที่กำหนดให้

นิยาม 8.6.1

เราจะกล่าวว่ากราฟ G เป็น **กราฟเชิงระนาบ** ถ้ากราฟนั้นสามารถเขียนบนระนาบได้โดยไม่มีเส้นเชื่อมใดตัดกันที่จุดซึ่งไม่ใช่จุดยอด

ตัวอย่าง 8.6.1 กราฟ K_4 ในรูป 8.6.2 (ก) เป็นกราฟเชิงระนาบ เพราะสามารถเขียนใหม่ได้โดยไม่มีเส้นเชื่อมใดตัดกันเลย ดังในรูป 8.6.2(ข), (ค) และ (ง)

รูป 8.6.2

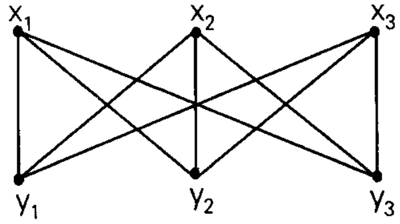


กราฟทั้งสี่ในรูป 8.6.2 เป็นกราฟถอดแบบกัน จะเห็นว่ากราฟ K_4 ในรูป 8.6.2(ก) มีเส้นเชื่อมตัดกัน แต่กราฟ K_4 เป็นกราฟเชิงระนาบเพราะเราสามารถเขียนกราฟ K_4 ใหม่โดยไม่มีเส้นเชื่อมตัดกันได้ เราจะเรียกกราฟในรูป (ข), (ค) และ (ง) ว่า **กราฟระนาบ** (plane graph) ของกราฟ K_4 ดังนั้น เมื่อกล่าวถึงกราฟระนาบ เราหมายถึงกราฟที่เขียนบนระนาบโดยไม่มีเส้นเชื่อมใดตัดกันที่จุดซึ่งไม่ใช่จุดยอด

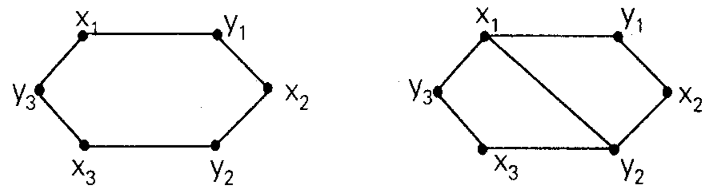
การแสดงว่ากราฟนั้นเป็นกราฟเชิงระนาบ วิธีหนึ่งทำได้โดยการเขียนกราฟระนาบของกราฟนั้น นั่นคือจะต้องเขียนแสดงโดยรูปให้เห็นจริงว่าไม่มีเส้นเชื่อมใดของกราฟตัดกันเลย

ตัวอย่าง 8.6.2 จงแสดงว่ากราฟ $K_{3,3}$ ในรูป 8.6.3 ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ

รูป 8.6.3



วิธีทำ $K_{3,3}$ มีวัฏจักรซึ่งมีความยาว 6 ดังในรูป 8.6.4(ก)

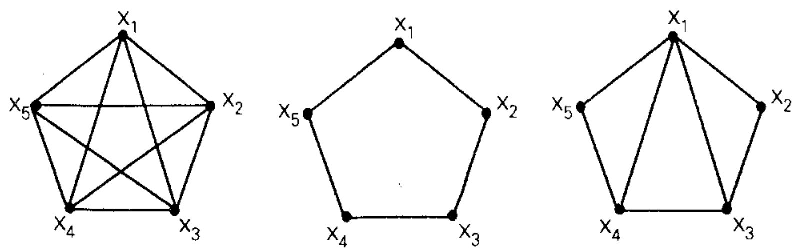


รูป 8.6.4 (ก) (ข)

เส้นเชื่อมที่ยังขาดอยู่ (เส้นเชื่อมที่วัฏจักรไม่ผ่าน) มีสามเส้น คือ $\{x_1,y_2\}$, $\{x_2,y_3\}$ และ $\{x_3,y_1\}$ เราไม่สามารถเพิ่มเส้นเชื่อมเหล่านี้โดยไม่ตัดเส้นเชื่อมอื่นได้ เช่นถ้าเส้นเชื่อม $\{x_1,y_2\}$ อยู่ภายในแล้วเส้นเชื่อม $\{x_3,y_1\}$ จะต้องอยู่ภายนอก ดังในรูป 8.6.4(ข) จะเห็นว่าเราไม่สามารถเพิ่มเส้นเชื่อม $\{x_2,y_3\}$ โดยไม่ตัดเส้นเชื่อมใด ๆ ถ้า $\{x_1,y_2\}$ อยู่ภายนอก เราสามารถอ้างเหตุผลได้ในทำนองเดียวกัน ดังนั้น $K_{3,3}$ ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ ■

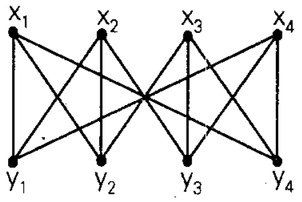
ตัวอย่าง 8.6.3 จงแสดงว่ากราฟ K_5 ในรูป 8.6.5(ก) ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ

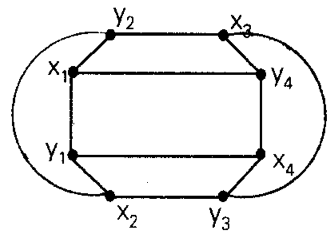
รูป 8.6.5



วิธีทำ K_5 มีวัฏจักรซึ่งมีความยาว 5 เช่นวัฏจักร x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ในรูป 8.6.5(ข) เส้นเชื่อมที่ยังขาดอยู่คือ $\{x_1,x_3\}$, $\{x_1,x_4\}$, $\{x_2,x_4\}$, $\{x_2,y_5\}$ และ $\{x_3,x_5\}$ ถ้าเส้นเชื่อม $\{x_1,x_3\}$ และ $\{x_1,x_4\}$ อยู่ภายในแล้ว เส้นเชื่อม $\{x_2,x_4\}$ และ $\{x_2,y_5\}$ จะต้องอยู่ภายนอกดังรูป (ค) ดังนั้น ไม่ว่า $\{x_3,x_5\}$ จะอยู่ภายในหรือภายนอก จะต้องตัดกับเส้นเชื่อมอื่นโดยไม่มีทางเลี่ยง เมื่อพิจารณาต่อไปจนครบทุกกรณีที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมด จะพบว่าไม่สามารถเขียนกราฟระนาบที่ไม่มีเส้นเชื่อมใดตัดกันได้ แสดงว่ากราฟ K_5 ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ ■

ตัวอย่าง 8.6.4 จงพิจารณาว่ากราฟในรูป 8.6.6(ก) เป็นกราฟเชิงระนาบหรือไม่





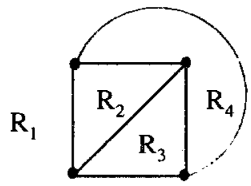
รูป 8.6.6 (ก) (ข)

วิธีทำ เริ่มต้นด้วยการมองหาวงจรที่ยาวที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ พบวงจร $x_1, y_2, x_3, y_4, x_4, y_3, x_2, y_1, x_1$ ในรูป 8.6.6(ข) ขั้นต่อไปพยายามเพิ่มเส้นเชื่อมสี่เส้นที่ยังขาดอยู่คือเส้นเชื่อม $\{x_1,y_4\}$, $\{x_2,y_2\}$, $\{x_3,y_3\}$ และ $\{x_4,y_1\}$ จะเห็นว่าเราสามารถเขียนเส้นเชื่อม $\{x_1,y_4\}$ และ $\{x_4,y_1\}$ ไว้ภายใน เขียนเส้นเชื่อมอีกสองเส้นที่เหลือคือ $\{x_2,y_2\}$ และ $\{x_3,y_3\}$ ไว้ภายนอกได้โดยไม่ตัดเส้นเชื่อมใด ๆ ดังนั้นกราฟในรูป 8.6.6(ก) เป็นกราฟเชิงระนาบ ■

นิยาม 8.6.2

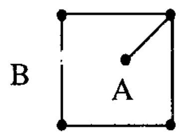
ถ้า G เป็นกราฟเชิงระนาบ กราฟระนาบของ G จะแบ่งระนาบออกเป็นส่วน ๆ เรียกแต่ละส่วนว่า **บริเวณ** ดีกรีของบริเวณ R คือความยาวของทางเดินที่ติดรอบบริเวณนั้นและเรียกบริเวณที่ไม่ถูกปิดล้อมว่า **บริเวณอนันต์** (infinite region)

ตัวอย่าง 8.6.5 กราฟในรูป 8.6.7 ซึ่งเป็นกราฟเดียวกันกับกราฟระนาบในรูป 8.6.2(ข) แบ่งระนาบออกเป็น 4 บริเวณคือบริเวณ R_1, R_2, R_3 และ R_4 โดยมี R_1 เป็น **บริเวณอนันต์** ■



รูป 8.6.7

ตัวอย่าง 8.6.6 ดีกรีของบริเวณ R_1, R_2, R_3 และ R_4 ในรูป 8.6.7 ต่างก็เท่ากับ 3 ในรูป 8.6.8 ดีกรีของบริเวณ A คือ 6 ส่วนดีกรีของบริเวณ B เท่ากับ 4 ■



รูป 8.6.8

จะเห็นว่ากราฟระนาบของ K_4 ในรูป 8.6.2 (ข), (ค) และ (ง) ต่างก็แบ่งพื้นที่ของระนาบออกเป็น 4 บริเวณ ในปี ค.ศ. 1752 ออยเลอร์ได้พิสูจน์ให้เห็นว่ากราฟระนาบแต่ละรูปของกราฟเดียวกัน จะแบ่งระนาบออกเป็นบริเวณซึ่งมีจำนวนเท่ากัน ออยเลอร์ได้พิสูจน์โดยวิธีหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนบริเวณที่ถูกแบ่งโดยกราฟระนาบ จำนวนจุดยอด และจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟนั้น เราจะเรียกความสัมพันธ์หรือสูตรที่ได้นี้ว่า **สูตรของออยเลอร์** ดังในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.6.1

ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยงซึ่งมีจุดยอด v จุด และมีเส้นเชื่อม e เส้น ถ้า G เป็นกราฟเชิงระนาบแล้ว $r = e - v + 2$ เมื่อ r คือจำนวนบริเวณที่ถูกแบ่งโดยกราฟระนาบของ G

พิสูจน์ เราจะเริ่มด้วยการสร้างลำดับของกราฟ $G_1, G_2, \ldots, G_e$ โดยที่ G_e เป็นกราฟระนาบของกราฟ G ขั้นแรกเราจะเลือกเส้นเชื่อมเส้นใดเส้นหนึ่งใน G พร้อมทั้งจุดยอดทั้งสองที่กระทบกับเส้นเชื่อมนั้นเป็นกราฟ G_1 ต่อจากนั้นเราจะสร้างกราฟ G_n $(n \geq 2)$ จากกราฟ G_{n-1} โดยการเพิ่มเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นซึ่งกระทบกับจุดยอดใน G_{n-1} ถ้าจุดยอดที่อยู่ปลายอีกข้างหนึ่งของเส้นเชื่อมที่เพิ่มเข้าไปไม่อยู่ใน G_{n-1} เราจะรวมจุดยอดนี้เข้าไปใน G_n ด้วย ขบวนการสร้างกราฟดังกล่าวนี้เป็นไปได้ทุกขั้นตอน เนื่องจากกราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง

ให้ r_n, v_n และ e_n เป็นจำนวนบริเวณ จำนวนจุดยอด และจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ G_n ตามลำดับ เมื่อ $n = 1$ เรามีกราฟ G_1 ซึ่งประกอบด้วยบริเวณหนึ่งบริเวณ จุดยอดสองจุด และเส้นเชื่อมหนึ่งเส้น นั่นคือ $r_1 = 1$, $v_1 = 2$, และ $e_1 = 1$ ดังนั้นสูตรของออยเลอร์สำหรับกราฟ G_1 คือ $1= 1 - 2 + 2$ เป็นจริง

ต่อไปเราจะพิสูจน์ว่าสูตรของออยเลอร์เป็นจริงสำหรับ G_n ซึ่งเป็นกราฟระนาบของกราฟ G เราจะพิสูจน์โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์

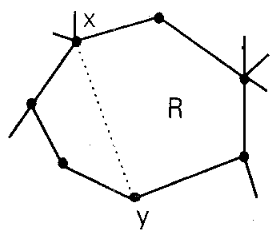
เราได้พิสูจน์แล้วว่าทฤษฎีบทเป็นจริงสำหรับ G_1 ดังนั้นเราจะสมมุติว่าทฤษฎีบทเป็นจริงสำหรับ G_{n-1} เมื่อ $n \geq 2$ นั่นคือ สมมุติว่า

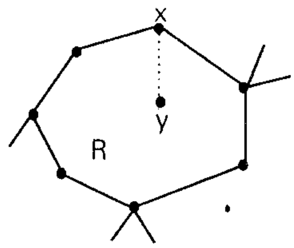
$$r_{n-1} = e_{n-1} - v_{n-1} + 2$$

และจะพิสูจน์ว่าทฤษฎีบทเป็นจริงสำหรับ G_n

ให้ $\{x,y\}$ เป็นเส้นเชื่อมเส้นสุดท้ายที่เพิ่มเข้าไปใน G_{n-1} เพื่อให้ได้มาซึ่งกราฟ G_n เราจะแยกการพิจารณาออกเป็นสองกรณีคือ

กรณีที่ 1 เมื่อ x และ y อยู่ใน G_{n-1} ดูรูป 8.6.9(ก) ประกอบ จุดยอดทั้งสองนี้จะต้องอยู่บนเส้นเชื่อมของบริเวณ R เดียวกัน มิฉะนั้นเราจะไม่สามารถเพิ่มเส้นเชื่อม $\{x,y\}$ เข้าไปได้โดยที่เส้นเชื่อมไม่ตัดกัน เมื่อเพิ่มเส้นเชื่อม $\{x,y\}$ จะทำให้บริเวณ R ถูกแบ่งออกเป็นสองส่วน ดังในรูป 8.6.9(ก)





รูป 8.6.9 (ก) (ข)

ดังนั้น $r_n = r_{n-1}+ 1$, $v_n = v_{n-1}$ และ $e_n = e_{n-1}+ 1$ ซึ่งทำให้ $r_n = e_n - v_n + 2$

กรณีที่ 2 เมื่อจุดยอด x หรือ y จุดใดจุดหนึ่งไม่อยู่ใน G_{n-1} สมมุติว่า y ไม่อยู่ใน G_{n-1} จะพบว่าเมื่อเราเพิ่มเส้นเชื่อม {x,y} เข้าไปใน G_{n-1} แล้วจำนวนบริเวณจะเท่าเดิม จำนวนจุดยอดจะเพิ่มขึ้น 1 จุด และจำนวนเส้นเชื่อมจะเพิ่มขึ้นหนึ่งเส้น นั่นคือ

$$r_n = r_{n-1}\ ,\ v_n = v_{n-1} + 1 \ \text{ และ } \ e_n = e_{n-1} + 1$$

ซึ่งจะทำให้ $r_n = e_n - v_n + 2$

ทั้งสองกรณีแสดงให้เห็นว่าเมื่อสูตรของออยเลอร์เป็นจริงสำหรับ G_{n-1} แล้ว สูตรของออยเลอร์จะเป็นจริงสำหรับ G_n ด้วย แต่ G_n เป็นกราฟระนาบของกราฟ G ดังนั้นสูตรของออยเลอร์เป็นจริงสำหรับ G นั่นคือ $r = e - v + 2$ ■

ตัวอย่าง 8.6.7 จงหาจำนวนบริเวณซึ่งถูกแบ่งโดยกราฟระนาบที่เป็นกราฟเชื่อมโยงและมีจุดยอด 20 จุด โดยที่จุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเท่ากับ 3

วิธีทำ กราฟเชิงระนาบนี้มีจุดยอด 20 จุด นั่นคือ v = 20 และผลบวกของดีกรีของจุดยอดทุกจุดรวมกันเท่ากับ 3v = 3 x 20 = 60 ซึ่งจะเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมด ดังนั้น เส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟคือ e = 30 และจากสูตรของออยเลอร์เราจะได้

$$r = e - v + 2 = 30 - 20 + 2 = 12$$

แสดงว่ากราฟนี้จะแบ่งระนาบออกเป็น 12 บริเวณ ■

หมายเหตุ สูตรของออยเลอร์จะไม่เป็นจริง ถ้ากราฟนั้นไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง เช่นกราฟในรูป 8.6.10

รูป 8.6.10

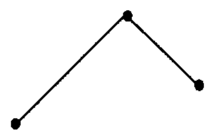
เราได้ $r = e - v + 2 = 0 - 2 + 2 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะกราฟในรูป 8.6.10 มีบริเวณหนึ่งบริเวณ

ต่อไปเราจะศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นของกราฟเชิงระนาบ นั่นคือ กราฟใดที่มีสมบัติไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวแล้วกราฟนั้นจะไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ

ทฤษฎีบท 8.6.2

ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยงซึ่ง $e > 1$ ถ้า G เป็นกราฟเชิงระนาบแล้ว $e \leq 3v - 6$

พิสูจน์ ในกรณีที่ $e = 2$ กราฟจะมีลักษณะดังในรูป 8.6.11 จะเห็นว่า $2 = e \leq 3v - 6 = 3$ ซึ่งเป็นจริงเสมอ ฉะนั้นสมุติให้ $e > 2$ เราทราบว่าบริเวณแต่ละบริเวณจะต้องมีดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 3 นอกจากนี้เรายังทราบอีกว่าเส้นเชื่อมแต่ละเส้นจะเป็นเส้นเชื่อมของบริเวณสองบริเวณ



รูป 8.6.11

(ยกเว้นเส้นเชื่อมที่จุดปลายอีกข้างหนึ่งมีดีกรีเท่ากับหนึ่งเช่นในรูป 8.6.8) ดังนั้น ถ้าเราบวกดีกรีของบริเวณแต่ละบริเวณเข้าด้วยกัน เส้นเชื่อมแต่ละเส้นจะถูกนับสองครั้ง นั่นคือ

$$3r \leq \text{ผลบวกของดีกรีของบริเวณแต่ละบริเวณ} \leq 2e$$

จากสูตรของออยเลอร์ เรามี $r = e - v + 2$ ดังนั้น $3r = 3e - 3v + 6 \leq 2e$ หรือ $e \leq 3v - 6$ ตามต้องการ ■

ตัวอย่าง 8.6.8 จงแสดงว่า K_5 ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ

วิธีทำ ในที่นี้ $v = 5$ และ $e = 10$ จะเห็นกราฟ K_5 มีสมบัติไม่สอดคล้องกับอสมการ $e \leq 3v - 6$ เพราะในกราฟ K_5 มี $e = 10$ แต่ $3v - 6 = 9$ ดังนั้น โดยใช้ทฤษฎีบท 8.6.2 สรุปได้ว่า K_5 ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ ■

ดังได้แสดงแล้วในตัวอย่าง 8.6.2 ว่า $K_{3,3}$ ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ จะเห็นว่ากราฟ $K_{3,3}$ มี $v = 6$ และ $e = 9$ ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $e \leq 3v - 6$ เพราะ $3v - 6 = 3 \times 6 - 6 = 12$ ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่ากราฟที่มีสมบัติสอดคล้องกับอสมการ $e \leq 3v - 6$ ไม่จำเป็นว่ากราฟนั้นจะต้องเป็นกราฟเชิงระนาบ อย่างไรก็ตาม เรายังมีอีกวิธีหนึ่งที่เราสามารถใช้สำหรับพิสูจน์ว่า $K_{3,3}$ ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ ดังในบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 8.6.1

ให้ G เป็นกราฟเชิงระนาบซึ่งเป็นกราฟเชื่อมโยง ถ้า $e > 1$ และ G ไม่มีวัฏจักรซึ่งมีความยาวเท่ากับ 3 แล้ว $e \leq 2v - 4$

พิสูจน์ วิธีพิสูจน์จะคล้ายกับข้อพิสูจน์ในทฤษฎีบท 8.6.2 ยกเว้นในกรณีนี้เราทราบว่ากราฟ G ไม่มีวัฏจักรซึ่งมีความยาวเท่ากับ 3 ดังนั้น บริเวณแต่ละบริเวณจะต้องมีดีกรีมากกว่า 3 รายละเอียดในการพิสูจน์จะเว้นไว้ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด ■

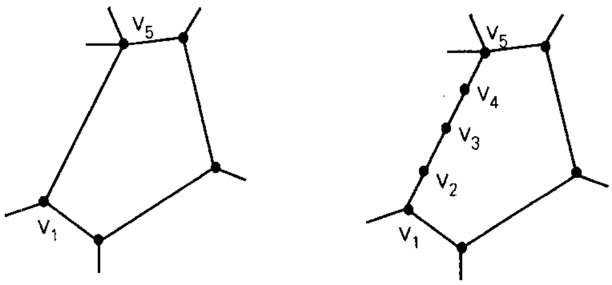
ตัวอย่าง 8.6.7 จงแสดงว่ากราฟ $K_{3,3}$ ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ

วิธีทำ เนื่องจาก $K_{3,3}$ ไม่มีวัฏจักรซึ่งมีความยาวเท่ากับ 3 ความจริงข้อนี้สามารถตรวจสอบได้จากกราฟ $K_{3,3}$ โดยไม่ยากนัก ในที่นี้ $v = 6$, $e = 9$ และ $2v - 4 = 8$ ดังนั้น อสมการ $e \leq 2v - 4$ ไม่เป็นจริง นั่นคือ $K_{3,3}$ ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ ■

นิยาม 8.6.2

เราจะกล่าวว่ากราฟสองกราฟใด ๆ มี **โครงร่าง** (configuration) เหมือนกัน หรือ **ฮอมีโอมอร์ฟิคกัน** (homeomorphic) ถ้ากราฟหนึ่งได้จากอีกกราฟหนึ่งโดยการเพิ่มหรือลบจุดยอดซึ่งมีดีกรีเท่ากับสองออก นั่นคือ ใช้เส้นเชื่อมและวิถีของจุดยอดซึ่งมีดีกรีสองแทนกันได้

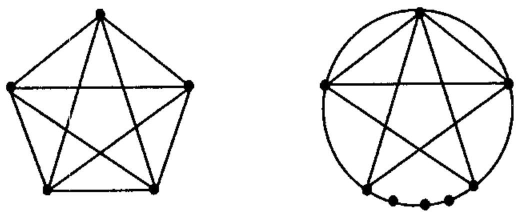
ตัวอย่าง 8.6.8 จากรูป 8.6.12 ถ้าแทนวิถี v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ในกราฟรูปขวามือด้วยเส้นเชื่อม $\{v_1,v_5\}$ จะได้กราฟในรูปซ้ายมือ ดังนั้นเราถือว่ากราฟทั้งสองนี้มีโครงร่างเหมือนกันหรือฮอมีโอมอร์ฟิคกัน



รูป 8.6.12

จะเห็นว่าการแทนเส้นเชื่อมด้วยวิถีหรือแทนวิถีด้วยเส้นเชื่อมดังกล่าวไม่ทำให้ภาวะการเป็นกราฟเชิงระนาบเปลี่ยนไป ■

ตัวอย่าง 8.6.9 กราฟทั้งสองในรูป 8.6.13 เป็นกราฟซึ่งมีโครงร่างของ K_5



รูป 8.6.13

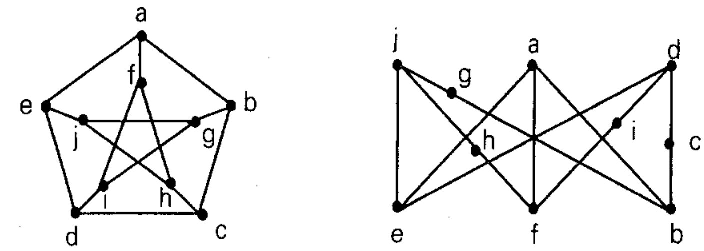
ในกรณีนี้เรากล่าวว่ากราฟทั้งสอง **ฮอมีโอมอร์ฟิค** กัน ■

ทฤษฎี 8.6.3 (Kuratowski's Theorem)

กราฟ G เป็นกราฟเชิงระนาบก็ต่อเมื่อกราฟ G ไม่มีกราฟย่อยที่เป็นโครงร่างของ $K_{3,3}$ หรือ K_5

พิสูจน์ นักศึกษาที่ต้องการรายละเอียดการพิสูจน์สามารถศึกษาได้จากหนังสือ Introduction ot Combinatorial Mathematics ของ C.L.Liu (1968)

ตัวอย่าง 8.6.10 กราฟในรูป 8.6.14 (ก) เป็นที่รู้จักกันในชื่อ **พีเตอร์เซ่นกราฟ** (Petersen graph) ไม่เป็นกราฟระนาบ เพราะพีเตอร์เซ่นกราฟมีโครงร่าง



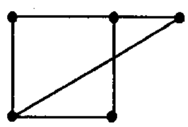
รูป 8.6.14 (ก) (ข)

ของ $K_{3,3}$ เป็นกราฟย่อยอยู่ด้วย ดังในรูป (ข) เราหาโครงร่างของ $K_{3,3}$ ได้โดยเขียนกราฟ $K_{3,3}$ ที่เป็นกราฟย่อยของพีเตอร์เซ่นกราฟ แล้วค่อย ๆ เพิ่มจุดยอดที่เหลือเข้าไปดังในรูป ■

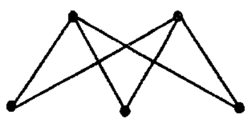
แบบฝึกหัด

1. จงเขียนกราฟในข้อต่อไปนี้ใหม่ โดยไม่มีเส้นเชื่อมตัดกันเลย

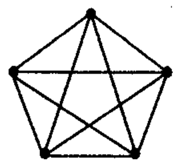
ก.



ข.

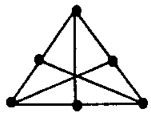


ค.

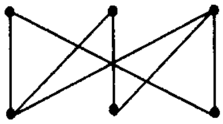


2. กราฟต่อไปนี้เป็นกราฟเชิงระนาบหรือไม่ ถ้าเป็นจงเขียนกราฟระนาบของกราฟนั้นโดยไม่มีเส้นเชื่อมตัดกันเลย

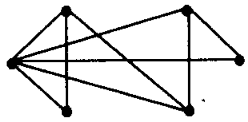
ก.



ข.

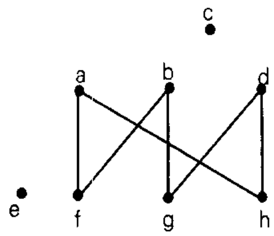


ค.

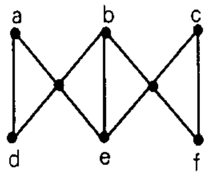


3. กราฟใดต่อไปนี้มีโครงร่าง $K_{3,3}$

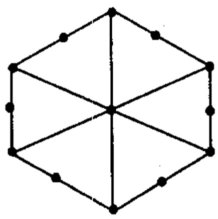
ก.



ข.



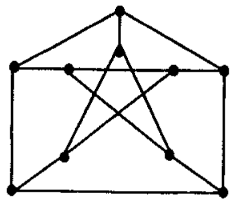
ค.



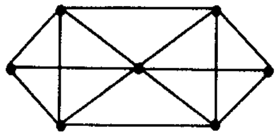
4. ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงและเป็นกราฟเชิงระนาบ จงพิจารณาว่า G จะมีจำนวนจุดยอด 70 จุด มีเส้นเชื่อม 75 เส้น และมีบริเวณ 6 บริเวณ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

5. จงพิจารณาว่ากราฟแต่ละรูปต่อไปนี้เป็นกราฟเชิงระนาบหรือไม่ ถ้าเป็นจงหากราฟระนาบของกราฟนั้น ถ้าไม่เป็นจงหาโครงร่าง K_5 หรือ $K_{3,3}$ ในกราฟนั้น

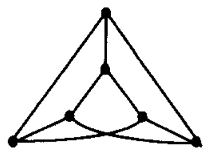
ก.



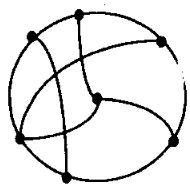
ข.



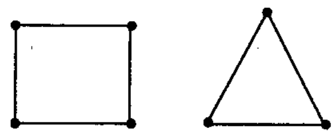
ค.



ง.



6. ให้ G เป็นกราฟเชิงระนาบซึ่งเป็นกราฟเชื่อมโยงและ G ไม่มีวงจรซึ่งมีความยาวน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4 จงพิสูจน์ว่าถ้า $v \geq 4$ แล้ว $e \leq \frac{5}{3}v - \frac{10}{3}$
7. ให้ G เป็นกราฟเชิงระนาบ จงพิสูจน์ว่า G มีจุดยอดอย่างน้อยหนึ่งจุดที่มีดีกรีน้อยกว่า 6.
8. กราฟสองรูปนี้
   ก. ฮอมีโอมอร์ฟิคกันหรือไม่
   ข. เป็นกราฟถอดแบบกันหรือไม่



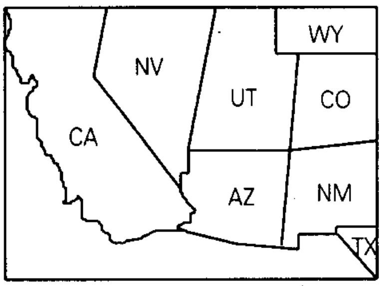
8.7 การให้สีกราฟ

Graph Coloring

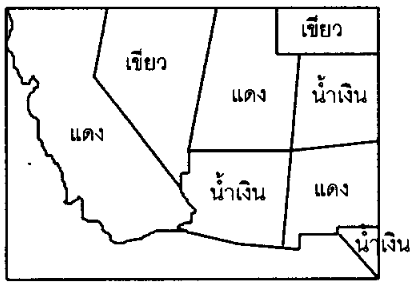
ปัญหาการให้สีหรือการระบายสีบนแผนที่ เป็นปัญหาที่ศึกษากันมานานแล้วและเป็นปัญหาที่กระตุ้นให้วิชาทฤษฎีกราฟพัฒนาไปอย่างรวดเร็ว การระบายสีส่วนของแผนที่โลกนั้น ยึดหลักว่า ประเทศ

สองประเทศที่มีชายแดนร่วมกันจะต้องให้สีประเทศทั้งสองนั้นต่างกัน วิธีหนึ่งที่จะทำได้คือ ให้สีทุกประเทศแตกต่างกันทั้งหมด เช่น ถ้ามี 10 ประเทศบนแผนที่ เราใช้สี 10 สี ระบายประเทศละหนึ่งสี วิธีนี้เป็นวิธีที่ง่ายแต่ไม่มีประสิทธิภาพ เพราะถ้ามีประเทศต่าง ๆ เป็นจำนวนมาก จะทำให้ยากต่อการแยกแยะสีซึ่งคล้ายคลึงหรือใกล้เคียงกัน ดังนั้น เราจึงพยายามที่จะใช้จำนวนสีให้น้อยที่สุดเท่าที่จะทำได้ คำว่า "แผนที่" ในที่นี้เราหมายถึงแผนที่ซึ่งพื้นที่ของแต่ละประเทศติดต่อเป็นส่วนเดียวกัน ประเทศที่มีจุดร่วมกันเพียงจุดเดียวจะไม่ถือว่ามีชายแดนร่วมกัน

พิจารณาแผนที่ในรูป 8.7.1(ก) ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของแผนที่ประเทศสหรัฐอเมริกา ลองกำหนดสีให้แก่แผนที่นี้ วิธีหนึ่งได้แก่การให้สีในรูป 8.7.1 (ข) ซึ่งใช้สีเพียง 3 สี



(ก)



(ข)

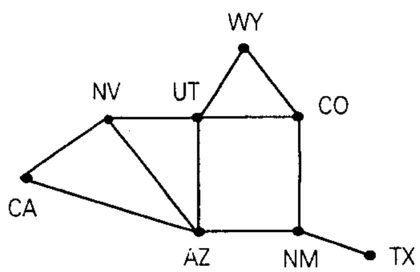
รูป 8.7.1 ส่วนหนึ่งของแผนที่ประเทศสหรัฐอเมริกา

จะใช้สีมากกว่านี้ก็ได้ เช่นใช้ 8 สี คือให้ทุกรัฐได้สีแตกต่างกันทั้งหมด แต่จะใช้จำนวนสีน้อยกว่าสามสีไม่ได้

เท่าที่ผ่านมายังไม่มีใครพบแผนที่ซึ่งจำเป็นต้องใช้สีมากกว่าสี่สี เป็นเวลากว่าร้อยปีแล้วที่เราคาดเดากันว่าแผนที่ทุกแผนที่สามารถระบายได้ด้วยสีเพียงสี่สีหรือน้อยกว่า การคาดเดานี้เป็นที่รู้จักกันแพร่

หลายในนาม **ข้อคาดเดาสี่สี** (four color conjective) หรือ **ปัญหาสี่สี** (four color problem) ไม่มีใครพิสูจน์หรือยกตัวอย่างที่ขัดแย้งกับการคาดเดานี้ได้ จนกระทั่งในปี 1879 นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษชื่อ Alfred Kempe ได้พิสูจน์ปัญหานี้ แต่ข้อพิสูจน์ของเขายังมีข้อบกพร่อง ถึงแม้ข้อพิสูจน์ของเขาจะมีช่องโหวแต่ก็ประกอบด้วยแนวความคิดที่เป็นประโยชน์มากมาย ในปี ค.ศ. 1976 นักคณิตศาสตร์สองท่านชื่อ Kenneth Appel และ Wolfgang Haken ได้แสดงให้เห็นว่าข้อคาดเดานั้นเป็นจริง เขาทั้งสองได้แยกปัญหาออกเป็นกรณี ๆ แล้วใช้คอมพิวเตอร์ซึ่งมีความเร็วสูงช่วยในการวิเคราะห์ตรวจสอบเป็นกรณี ๆ ซึ่งในการตรวจสอบนี้ต้องใช้เวลาการทำงานของคอมพิวเตอร์ซึ่งมีความเร็วสูงถึงกว่า 1,200 ชั่วโมง

เราสามารถแทนแผนที่ด้วยกราฟ โดยแทนพื้นที่ของแต่ละประเทศ แต่ละรัฐ หรือแต่ละบริเวณด้วยจุดบนระนาบ ถ้าบริเวณสองบริเวณมีชายแดนร่วมกัน เราจะลากเส้นเชื่อมจุดที่แทนสองบริเวณนั้นจะได้กราฟซึ่งจะเรียกว่า **กราฟคู่เสมอกัน** (dual graph) ของแผนที่นั้น



รูป 8.7.2

เช่น กราฟในรูป 8.7.2 เป็นกราฟคู่เสมอกันของแผนที่ในรูป 8.7.1(ก) ดังนั้นปัญหาการระบายสีแผนที่จะเทียบได้กับปัญหาการให้สีจุดยอดของกราฟโดยที่จุดยอดซึ่งประชิดกันจะได้สีแตกต่างกัน จากการสังเกตจะ

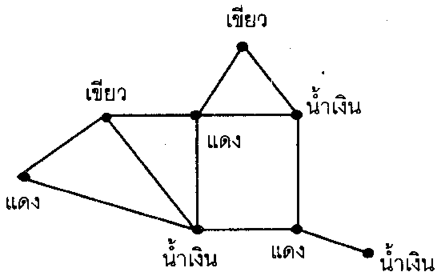
พบว่า กราฟคู่เสมอกันของแผนที่ใด ๆ จะเป็นกราฟระนาบ ในทางกลับกัน เราจะพบว่ากราฟระนาบใด ๆ จะเป็นกราฟคู่เสมอกันกับแผนที่บางแผนที่เสมอ

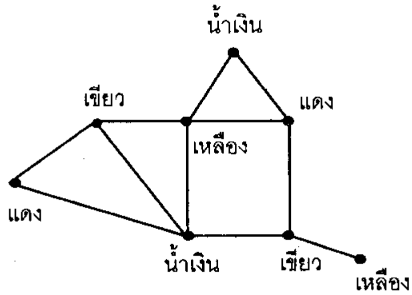
นิยาม 8.7.1

การให้สีกราฟ (coloring of a graph) คือการกำหนดสีให้แก่จุดยอดของกราฟ โดยจุดยอดที่ประชิดกันได้สีที่แตกต่างกัน

ตัวอย่าง 8.7.1 จงให้สีกราฟในรูป 8.7.2 ข้างบนนี้

วิธีทำ ในรูปข้างล่างนี้เป็นวิธีให้สีกราฟสองวิธีแตกต่างกัน





รูป 8.7.3 (ก) (ข)

ในรูป (ก) ใช้สีเพียง 3 สี คือ เขียว แดง และน้ำเงิน ส่วนในรูป (ข) ใช้สี 4 สีคือ เขียว แดง น้ำเงิน และเหลือง ■

นิยาม 8.7.2

รงคเลข (Chromatic number) ของกราฟ คือจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่กำหนดให้แก่กราฟนั้นได้

ตัวอย่าง 8.7.2 จงหารงคเลขของกราฟบริบูรณ์ K_n

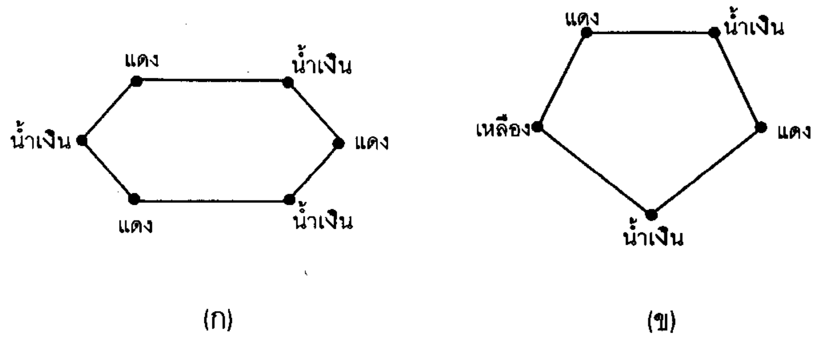
วิธีทำ ในการให้สีจุดยอดของกราฟบริบูรณ์ K_n นั้น เราจะต้องใช้สีถึง n สี ทั้งนี้เนื่องจากจุดยอดทุก ๆ จุดประชิดกัน คือมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดสองจุดใด ๆ ดังนั้น แต่ละจุดจะต้องได้สีแตกต่างกัน นั่นคือรงคเลขของ K_n เท่ากับ n ■

ตัวอย่าง 8.7.3 จงหารงคเลขของกราฟสองส่วน $K_{m,n}$

วิธีทำ ดูเหมือนว่าจำนวนสีที่ใช้จะขึ้นอยู่กับจำนวนเต็มบวก m และ n แต่แท้จริงแล้วเราใช้เพียงสองสีก็เพียงพอ โดยให้จุดยอด m จุดที่อยู่กลุ่มเดียวกันได้รับสีเหมือนกัน และให้อีกสีหนึ่งแก่จุดยอด n จุดที่เหลือ ดังนั้นรงคเลขของ $K_{m,n}$ คือ 2 เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ■

ตัวอย่าง 8.7.4 จงหารงคเลขของกราฟ C_n เมื่อ C_n คือวัฏจักรที่มีจุดยอด n จุด

วิธีทำ เพื่อความสะดวกในการอธิบายเราจะพิจารณากรณีเฉพาะสองกรณี คือเมื่อ n = 6 และ n = 5 กรณีที่ n = 6 เราจะเลือกจุดยอดหนึ่งจุดเป็นจุดเริ่มต้น ให้สีแดงแก่จุดเริ่มต้นนั้น และให้สีน้ำเงินแก่จุดยอดที่อยู่ถัดไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังแสดงในรูป 8.7.4(ก) เคลื่อนต่อไปในทิศทางเดิม โดยให้สีจุดยอดถัดไปเป็นสีแดงและน้ำเงินสลับกัน จะเห็นว่าจุดยอดสุดท้ายคือจุดยอดที่ 6 ได้สีน้ำเงิน แสดงว่าสีสองสีเพียงพอต่อการกำหนดสีให้แก่กราฟ C_6 จะใช้สีน้อยกว่านี้ไม่ได้ นั่นคือรงคเลขของ C_6 เท่ากับสอง

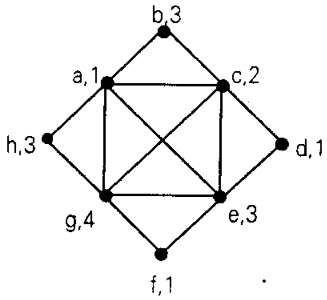


รูป 8.7.4 (ก) (ข)

ในกรณีที่ $n = 5$ ซึ่งเป็นเลขคี่ เราจะให้สีในลักษณะเดียวกันกับกรณี $n = 6$ คือ ให้สีแดงแก่จุดยอดที่เป็นจุดยอดเริ่มต้น และจะให้สีแดงและน้ำเงินสลับกันไปแก่จุดยอดที่อยู่ถัดไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา จะพบว่าจุดยอดที่สี่ได้สีน้ำเงิน ดังนั้น จุดยอดสุดท้ายจะเป็นสีแดงหรือน้ำเงินไม่ได้ นั่นคือ จะต้องให้สีใหม่ที่ต่างไปจากสีแดงและน้ำเงิน เช่นให้สีเหลือง แสดงว่าจะต้องใช้สีอย่างน้อยสามสี ดังรูป 8.7.4 (ข) ดังนั้น รงคเลขของ C_5 เท่ากับ 3

ในกรณีทั่ว ๆ ไป รงคเลขของ C_n จะเท่ากับ 2 ถ้า n เป็นจำนวนคู่และเท่ากับ 3 ถ้า n เป็นจำนวนคี่ ■

ตัวอย่าง 8.7.5 จงหารงคเลขของกราฟในรูป 8.7.5



รูป 8.7.5

วิธีทำ เริ่มจากการพิจารณากราฟบริบูรณ์ K_4 ซึ่งอยู่ภายใน แสดงว่าเราจะต้องให้สีสี่สีต่างกันแก่จุดยอด a, c, e และ g สมมุติว่าให้สี 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ ดังแสดงในรูป 8.7.5 หลังจากให้สีครบทั้งสี่สีแก่จุดยอดของ K_4 แล้ว เราสามารถให้สีจุดยอดที่เหลือโดยไม่ยาก จะเห็นว่าจุดยอดที่เหลือคือ b, d, f และ h จุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเป็นสอง ดังนั้นที่จุดยอดซึ่งมีดีกรีสองเหล่านี้ เราสามารถเลือกให้สีสองสีในสี่สีที่เลือกใช้ไปแล้ว โดยไม่ให้ซ้ำกับสีของจุดยอดสองจุดซึ่งประชิดกับจุดยอดนั้น

สมมุติว่าให้สีที่ 1 ที่จุดยอด d และ f และให้สีที่ 3 ที่จุดยอด h และ b ดังนั้นรงคเลขของกราฟในรูป 8.7.4 เท่ากับ 4 ■

จะเห็นว่าการหารงคเลขของกราฟไม่ใช่เรื่องง่าย โดยเฉพาะเมื่อกราฟมีจำนวนจุดยอดมาก ๆ ขั้นตอนวิธีเวลช์และเพาเวลล์จะช่วยให้การหารงคเลขง่ายและเป็นระบบมากขึ้น

ขั้นตอนวิธีเวลช์และเพาเวลล์

Welch and Powell Algorithm

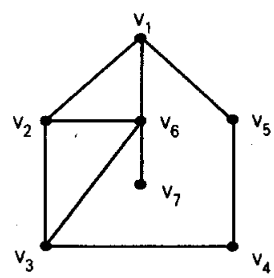
ต้องการจะหารงคเลขของกราฟที่กำหนดให้ ในขั้นแรกเราจะต้องจัดเรียงจุดยอดของกราฟที่กำหนดให้ตามลำดับของจำนวนดีกรีจากมากไปน้อย การจัดเรียงดังกล่าวนี้อาจทำได้หลายแบบเพราะอาจมีจุดยอดบางจุดมีดีกรีเท่ากัน ในกรณีที่มีดีกรีเท่ากัน เราสามารถเลือกลำดับได้ตามใจชอบ ให้สีที่หนึ่งกับจุดยอดแรกในลำดับ ให้สีเดียวกันนี้กับจุดยอดถัดไปในลำดับที่ไม่ประชิดกับจุดยอดที่กำหนดสีให้แล้ว ทำจนกระทั่งถึงจุดสุดท้ายในลำดับ ถ้ามีจุดยอดที่ยังไม่กำหนดสี ให้ย้อนกลับไปที่ต้นลำดับแล้วทำซ้ำกระบวนการเดิม คือให้สีที่สองแก่จุดยอดแรกที่ยังไม่กำหนดสีและให้สีเดียวกันนี้กับจุดยอดถัดไปในลำดับที่ไม่ประชิดกับจุดยอดที่กำหนดสีให้แล้ว จนกระทั่งถึงจุดสุดท้ายในลำดับ ทำกระบวนการนี้ซ้ำต่อไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะกำหนดสีได้ครบหมดทุกจุด

ตัวอย่าง 8.7.6 จงหารงคเลขของกราฟ G ที่กำหนดให้ในรูป 8.7.6

วิธีทำ ขั้นแรกจัดเรียงจุดยอดของกราฟที่กำหนดให้ตามลำดับของจำนวนดีกรีจากมากไปน้อย ได้ดังนี้

V_6,	V_1,	V_2,	V_3,	V_4,	V_5,	V_7
แดง	น้ำเงิน		น้ำเงิน	แดง		น้ำเงิน

ให้สีแดงกับจุดยอด V_6 จุดยอดถัดไปที่ไม่ประชิดกับ V_6 คือจุดยอด V_4 ให้สีแดงเดียวกันนี้กับ V_4 จุดยอดถัดไปที่ไม่ประชิดกับ v_6 และ v_4 ที่ยังไม่ถูกกำหนดสี ในที่นี้ไม่มี ดังนั้นเราย้อนกลับไปที่ต้นลำดับ จุดยอดจุดแรกที่ยังไม่ถูกกำหนดสีได้แก่ v_1 เราให้สีน้ำเงินแก่จุดยอดนี้ จุดยอดถัดไปที่ไม่ประชิดกับ V_1 และยังไม่ถูกกำหนดสีคือจุดยอด V_3 ให้สีน้ำเงินแก่ v_3 จะเห็นว่า v_7 เป็นจุดยอดถัดไปที่ไม่ประชิดกับ v_1 และ v_3 ที่ยังไม่ถูกกำหนดสี ดังนั้นเราให้สีน้ำเงินแก่ v_7 เช่นกัน v_7 เป็นจุดยอดสุดท้ายในลำดับ แต่ยังเหลือจุดยอดที่ยังไม่ถูกกำหนดสีอีกสองจุดคือ v_2 และ v_5 เราย้อนกลับไปที่ต้นลำดับ จะเห็นว่า v_2 เป็นจุดแรกที่ที่ยังไม่ถูกกำหนดสี ให้สีใหม่แก่ v_2 เช่นให้สีเขียว v_5 เป็นจุดเดียวที่เหลือและไม่ประชิดกับ v_2 เราให้สีเขียวแก่ v_5 เช่นกัน ดังนั้นรงคเลขของกราฟนี้เท่ากับ 3 ■



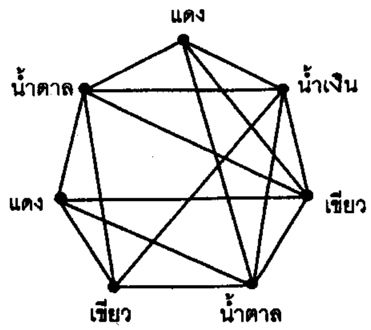
รูป 8.7.6

เราสามารถนำเรื่องการให้สีกราฟไปประยุกต์ใช้กับปัญหาซึ่งเกี่ยวข้องกับการจัดตารางเวลา (scheduling) และการมอบหมายงาน (assignment) ได้ เช่น ในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8.7.7 ในการจัดตารางสอบครั้งหนึ่ง มีวิชาที่ต้องจัดสอบเจ็ดวิชา คือวิชา 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7 สมมุติว่าวิชาแต่ละคู่ต่อไปนี้มีนักศึกษาร่วมกัน คือ 1 และ 2, 1 และ 3, 1 และ 4, 1 และ 7, 2 และ 3, 2 และ 4, 2 และ 5, 2 และ 7, 3 และ 4, 3 และ 6, 3 และ 7, 4 และ 5, 4 และ 6, 5 และ 6, 5 และ 7, และ 6 และ 7 อยากทราบว่าจะต้องจัดคาบเวลา

สอบให้แตกต่างกันกี่คาบ โดยไม่จัดวิชาซึ่งมีนักศึกษาร่วมกันไว้ในคาบเดียวกัน

วิธีทำ แทนวิชาต่าง ๆ ด้วยจุดยอดของกราฟ วิชาคู่ใดมีนักศึกษาร่วมกัน จะเชื่อมจุดยอดของวิชาคู่นั้นด้วยขอบของกราฟ จะได้กราฟดังในรูป 8.7.7



รูป 8.7.7

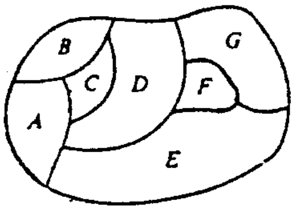
จะเห็นว่ารงคเลขของกราฟนี้คือ 4 แสดงว่าจะต้องใช้สีอย่างน้อย สี่สีสำหรับระบายกราฟนี้ สมมุติว่าเราให้สีดังแสดงในรูป 8.7.5 นั่นคือ เราจะต้องจัดคาบเวลาสอบให้แตกต่างกันสี่คาบ โดยจัดวิชาที่ได้สีเดียวกันไว้ในคาบเวลาเดียวกัน ดังนี้

คาบ	วิชา
1	1,6
2	2
3	3,5
4	4,7

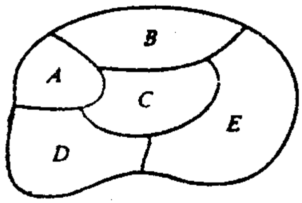
แบบฝึกหัด

1. จงหากราฟคู่เสมอกันของแผนที่ในแต่ละรูปต่อไปนี้

ก.

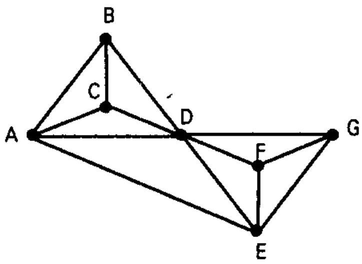


ข.

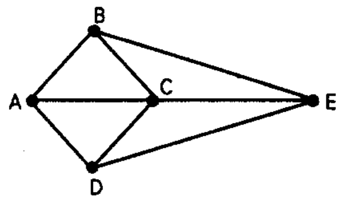


2. จงให้สีกราฟต่อไปนี้

ก.

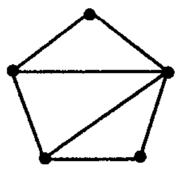


ข.

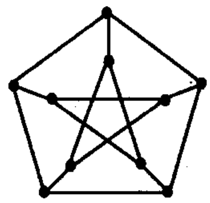


3. จงหารงคเลขของกราฟต่อไปนี้

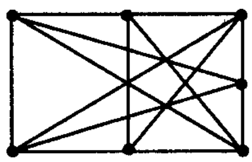
ก.



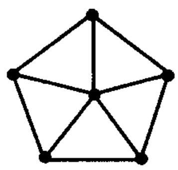
ข.



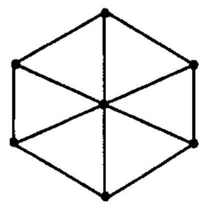
ค.



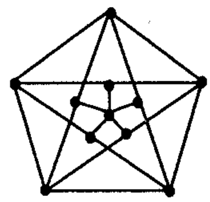
ง.



จ.

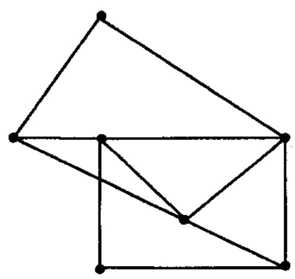


ฉ.

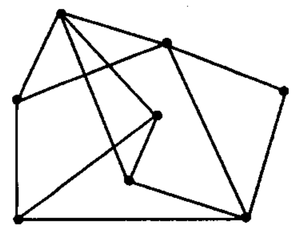


4. จงใช้ขั้นตอนวิธีเวลช์และเพาเวลล์หารงคเลขของกราฟต่อไปนี้

ก.



ข.



5. จงจัดตารางสอบสำหรับวิชา MA 111, MA 112, MA201, MA202, CS 103, CS 105, CS 203, CS 303 โดยใช้จำนวนคาบสอบที่น้อยที่สุด ถ้าวิชาแต่ละคู่มีนักศึกษาร่วมกัน ยกเว้นคู่วิชาต่อไปนี้ MA 111 และ CS 303, MA 112 และ CS 303, MA 202 และ CS 103, MA 202 และ CS 105, MA 111 และ MA 112, MA 201 และ MA 202, MA 111 และ MA 201

6. ภาควิชาคณิตศาสตร์มีคณะกรรมการอยู่ 6 ชุด แต่ละชุดจะต้องประชุมทุก ๆ เดือน ๆ ละหนึ่งครั้ง ถ้าคณะกรรมการชุดต่าง ๆ ประกอบด้วยกรรมการดังต่อไปนี้

C_1 = สมศักดิ์, สมชาย, สมพร

C_2 = สมชาย, สมสวาท, สมยศ

C_3 = สมศักดิ์, สมยศ, สมพร

C_4 = สมยศ, สมชาย, สมพร

C_5 = สมศักดิ์, สมชาย

อยากทราบว่าภาคคณิตศาสตร์จะต้องจัดคาบเวลาสำหรับประชุมให้แตกต่างกันกี่คาบเวลา