ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน(Relations and Functions)

1. ผลคูณคาร์ทีเชียน(Cartesian Product)

   นิยาม คูณคาร์ทีเชียน ของเซต A และ B คือ เซตคู่ลำดับ (a,b) ทั้งหมดโดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$ เช่น $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$

   และ A x B คือ ผลคูณคาร์ทีเชียนของเซต A และ เซต B ดังนั้น

   $A \times B = \{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)\}$

2. ความสัมพันธ์ (Relation) หมายถึง เซตของคู่ลำดับ

   2.1 ความสัมพันธ์จะมีขึ้นต้องมีเซตของคู่ลำดับ(Order Pairs) ก่อน

   2.2 คู่ลำดับจะเกิดขึ้นได้เมื่อมี A x B หรือ B x A ซึ่งเป็นผลคูณคาร์ทีเชียนนั่นเอง

3. โดเมน และ เรนจ์ของความสัมพันธ์ (Domain and Range of Relations)

   ถ้ากำหนด R เป็นความสัมพันธ์

   โดเมนของ R : (Dr) คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่ลำดับ

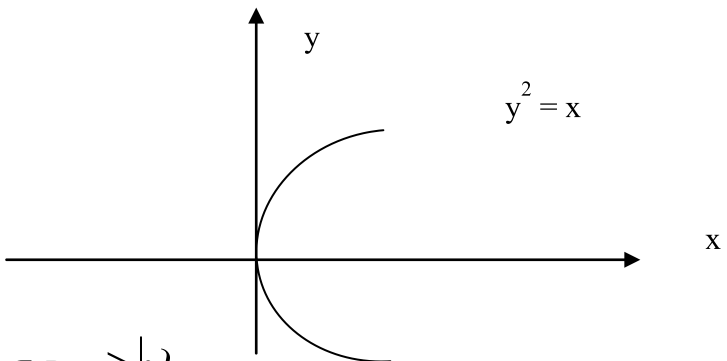
   เรนจ์ ของ R : (Rr) คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่ลำดับ

   ตัวอย่าง $R = \{(-1,1),(0,0)\}$

   โดเมน คือ $\{-1,0\}$ เรนจ์ คือ $\{1,0\}$

   ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y^2 = x\}$ จงหาค่า โดเมน และ เรนจ์

   วิธีทำ นำความสัมพันธ์ดังกล่าวเขียนเป็นกราฟ



$\therefore Dr = \{x \in R \mid x \geq 0\}$

$Rr = R$ (เซตจำนวนจริง)

4. ฟังก์ชัน (Function) คือ ความสัมพันธ์อย่างหนึ่งโดยที่คู่ลำดับใด ๆ จะมีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกันไม่ได้

เช่น $R1 = \{(1,2),(1,4)\}$ R1 ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะสมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน

$R2 = \{(1,3),(2,3)\}$ R2 เป็นฟังก์ชัน ตามนิยาม

$R3 = \{(1,4),(2,3)\}$ R3 เป็นฟังก์ชัน ตามนิยาม

5. การตรวจสอบความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. ลากเส้นขนานกับแกน y ตัดกราฟความสัมพันธ์ ได้ 1 จุดเป็นฟังก์ชัน แต่ถ้าตัดกราฟเกิน 1 จุด ไม่เป็นฟังก์ชัน
2. ตรวจสอบใช้หลักที่ว่า กำหนดให้ $(a , b) \in r$ และ $(a , c) \in r$ ดังภาพ

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[dr] & b \\ & c \end{tikzcd}$$

เราสามารถสรุปได้ว่า $b = c$ ก็แสดงว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่าง

จงตรวจสอบว่า $r = \{(x,y) \mid \in R \times R \;\; y^2 = 4x + 1\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ

ใช้วิธีที่ 2 จาก $y^2 = 4x + 1$

ให้ $(a,b) \in r$ จะได้ $b^2 = 4a + 1$ --------(1)

ให้ $(a,c) \in r$ จะได้ $c^2 = 4a + 1$ --------(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $b^2 = c^2$

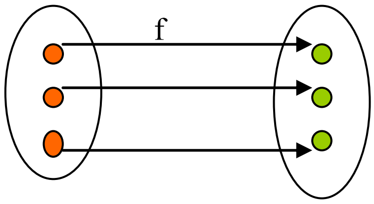
$$b = \pm c$$

เราไม่สามารถสรุปได้ว่า $b = c$ แสดงว่าความสัมพันธ์นี้ไม่เป็นฟังก์ชัน

6. ฟังก์ชันจาก A ไป B ถ้ากำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B มีเงื่อนไข $D_f = A$

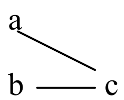
7. ฟังก์ชัน 1 - 1 (One - to - one function)

เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 ก็ต่อเมื่อ สมาชิกในเรนจ์แต่ละตัวมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในโดเมนเพียงตัวเดียวเท่านั้น



การตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชัน แบบ 1-1 หรือไม่ โดย

1. ลากเส้นขนานกับแนวแกน x ตัดกราฟฟังก์ชัน 1 จุด เป็นฟังก์ชัน 1-1 ถ้าตัดกราฟฟังก์ชันมากกว่า 1 จุด ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. ตรวจสอบใช้หลักที่ว่า กำหนดให้ $(a, c) \in f$ และ $(b, c) \in f$ ดังภาพ



เราสามารถสรุปได้ว่า $a = b$ ก็แสดงว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันแบบ1-1

8. ฟังก์ชันไปทั่วถึง(onto function)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ $R_f = B$

9. พีชคณิตของฟังก์ชัน คือ การนำฟังก์ชันมา บวก ลบ คูณ และหารกัน

10. อินเวอร์สของฟังก์ชัน (f^{-1})

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B อินเวอร์สของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} ก็จะเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

$$r = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\} \quad \Longrightarrow \quad r^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in r\}$$

การหาอินเวอร์สฟังก์ชัน(f^{-1})

(1) ที่ใดมี x แทนด้วย y และที่ใดมี y แทนด้วย x

(2) พยายามทำให้อยู่ในรูป $y = f(x)$

(3) y ตัวนี้คือ f^{-1} นั่นเอง

กรณีเขียนเป็นรูปคู่อันดับ การหาอินเวอร์สฟังก์ชัน(f^{-1}) ทำได้โดย

ถ้า $f = \{(a,1),(b,2),(c,3)\}$

ดังนั้น $f^{-1} = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

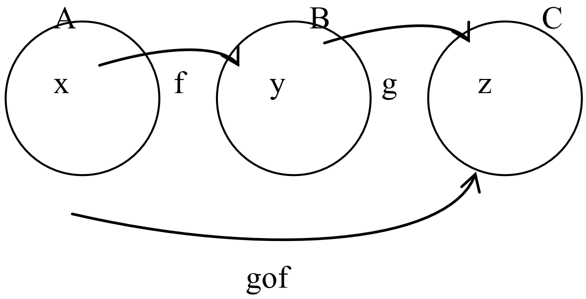
11.ฟังก์ชันคอมโพสิท(composite function) เป็นการกระทำตั้งแต่ฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันขึ้นไป โดยมีลักษณะเหมือนกับการนำฟังก์ชันนั้นมาเชื่อมกัน

ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ให้ g เป็นฟังก์ชันจาก B ไป C

เราสามารถสร้างฟังก์ชันจาก A ไป C ได้โดยเขียนแทนด้วย gof(x) = gf(x)

จะสร้าง gof(x) ได้ก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของ f ต้องเป็นสับเซตของโดเมน g



ทดสอบความเข้าใจ

ข้อ 1. จงบอกโดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์ R ต่อไปนี้

1.1) R1 = $\{(-3,9),(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1)\}$

1.2) R2 = $\{(X,Y) \mid Y = 2X\}$

1.3) R3 = $\{(X,Y) \mid Y = X^2\}$

1.4) R4 = $\{(X,Y) \mid Y^2 = X\}$

1.5) R5 = $\{(X,Y) \mid X^2 + Y^2 = 1\}$

ข้อ 2. จงบอกความสัมพันธ์ในข้อ 1 ว่าข้อใดเป็นความสัมพันธ์แบบฟังก์ชัน

ข้อ 3. กำหนดให้

$$f = \left(\frac{1}{2}x+1\right) = \frac{1}{2}x-1$$

จะได้ว่า f-1 (2) มีค่าเท่ากับ

1. 6 2. 4 3. 2 4. ไม่มีคำตอบ

เฉลย

ข้อ 1. โดเมนข้อ R1 = $\{-3,-2,-1,0,1\}$ เรนจ์ R1 = $\{9,4,1,0,1\}$

โดเมนข้อ R2 = $\{X \mid X \in R\}$ เรนจ์ R2 = $\{Y \mid Y \in R\}$

โดเมนข้อ R3 = $\{X \mid X \in R\}$ เรนจ์ R3 = $\{Y \mid Y$ เป็นจำนวนจริงบวก$\}$

โดเมนข้อ R4 = $\{X \mid X$ เป็นจำนวนจริงบวก$\}$

เรนจ์ R4 = $\{Y \mid Y$ เป็น จำนวนจริง$\}$

โดเมนข้อ R5 = $\{X \mid X \in R$ และ $X^2 < 1\}$

เรนจ์ R5 = $\{Y \mid Y \in R$ และ $Y^2 < 1\}$

ข้อ 2. R1 , R2 , R2 เป็นฟังก์ชัน

ข้อ 3. ตอบ 2

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

1. ผลคูณคาร์ทีเชียน

ถ้า A และ B เป็นเซต 2 เซต ผลคูณคาร์ทีเชียนของ A และ B เขียนแทนด้วย

$A\times B = \{(x,y) \mid x \in A$ และ $y \in B\}$

จากความหมายข้างต้น $A\times B$ คือเซตชนิดหนึ่ง โดยสมาชิกในเซตเป็นคู่อันดับ ซึ่งสมาชิกตัวหน้า ของคู่อันดับเป็นสมาชิกของ A ส่วนสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเป็นสมาชิกของ B

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนดให้ A = {1 , 2 ,3 } , B = { a , b} , C = {7}

<u>วิธีทำ</u> $A\times B = \{(1 , a) , (2 ,b),(2 , a) , (2 , b),(3 , a) , (3 , b)\}$

$A\times C = \{(1 , 7) ,(2 , 7), (3 , 7)\}$

$B\times C = \{((a ,7) ,(b ,7)\}$

สมบัติที่สำคัญ

1. ถ้า A มีจำนวนสมาชิก m ตัว และ B มีจำนวนสมาชิก n ตัว แล้ว $A\times B$ จะมีจำนวนสมาชิก $m\times n$ ตัว

2. $A\times B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A = \phi$ หรือ $B = \phi$

3. ถ้า $A\times B = A\times C$ และ $A \neq \phi$ แล้ว $B = C$

4. $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

5. $A\times(B\cap C) = (A\times B) \cap (A\times C)$

6. $A\times(B - C) = (A\times B) - (A\times C)$

2. ความสัมพันธ์(Relation)

ให้ A และ B เป็นเซต 2 เซต เรียก r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เมื่อ $r\subset A\times B$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ A = {1 , 2 , 3} , B = {2 , 3 ,4}

วิธีทำ $A\times B = \{(1 ,2) ,(1 ,3) , (1 , 4) ,(2 , 2) , (2 , 3) , (2 , 4) ,(3 , 2) , (3 , 3) , (3 , 4)\}$

$r_1 = \{(2 , 2) , (3 , 3)\}$

จะพบว่า r_1 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดยมีเงื่อนไข "ในแต่ละคู่อันดับ สมาชิกตัวหน้าจะมีค่าเท่ากับสมาชิกตัวหลัง"

$r_2 = \{(1 ,2) , (2 , 3), (3 , 4)\}$

จะพบว่า r_1 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดยมีเงื่อนไข "ในแต่ละคู่อันดับ สมาชิกตัวหน้ามีค่าน้อยกว่าสมาชิกตัวหลัง"

3. โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์

โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r

เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r

เรานิยมใช้สัญลักษณ์ D_r แทน โดเมนของ r และ R_r แทน เรนจของ r นั่นคือ

$D_r = \{ x \mid (x , y) \in r \}$

$R_r = \{ y \mid (x , y) \in r \}$

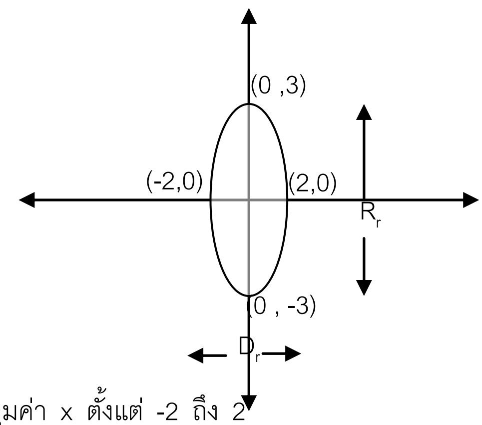
ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $r = \{(a ,1),(b , 2),(c , 3)\}$

วิธีทำ $D_r = \{ a , b , c \}$

$R_r = \{1 , 2 , 3 \}$

4. การหาโดเมนและเรนจของความสัมพันธ์จากกราฟ

ตัวอย่าง ให้ $r = \{(x , y) \in R \times R \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \}$ จงหาโดเมนและเรนจ



จุดบนกราฟจะครอบคลุมค่า x ตั้งแต่ -2 ถึง 2

ดังนั้น $D_r = [-2 , 2]$

จุดบนกราฟจะครอบคลุมค่า y ตั้งแต่ -3 ถึง 3

ดังนั้น $R_r = [-3 , 3]$ Ans.

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $r = \{(x ,y) \in R \times R \mid y = \frac{3x-2}{x-1} \}$ จงหาโดเมนของ r และ เรนจ R_r

วิธีทำ จากความสัมพันธ์ $y = \frac{3x-2}{x-1}$ จะพบว่าทุก ๆ ค่าที่ทำให้ x ที่เป็นจำนวนจริง ยกเว้น x = 1 เราสามารถหาค่า y ที่เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับสมการ

$\therefore D_r = \{ x \mid x \in R, x \neq 1\} = R - \{1\}$

จากความสัมพันธ์ $y = \frac{3x-2}{x-1}$ จะพบว่า

$yx - y = 3x - 2$

$yx - 3x = y - 2$

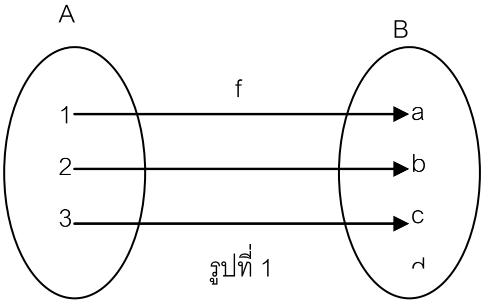
$x(y-3) = y - 2$

$x = \frac{y-2}{y-3}$

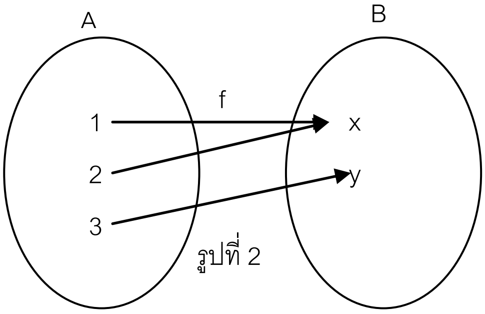
$\therefore R_r = \{ y \mid y \in R, y \neq 3\} = R - \{3\}$ Ans.

5. **ฟังก์ชั่น**(function)

ถ้า f เป็นความสัมพันธ์ จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชั่น เมื่อแต่ละสมาชิกในโดเมน(สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ)จะจับคู่หรือมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์(สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ)ได้เพียงสมาชิกเดียว

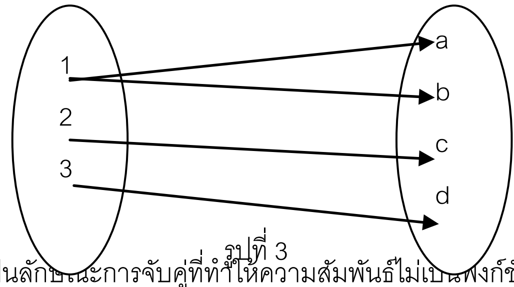


รูปที่ 1



รูปที่ 2

รูปที่ 1 และรูปที่ 2 เป็นลักษณะการจับคู่ที่ทำให้ความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชั่น



รูปที่ 3

รูปที่ 3 เป็นลักษณะการจับคู่ที่ทำให้ความสัมพันธ์ไม่เป็นฟังก์ชั่น

การตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชั่นหรือไม่

1. สามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์นั้นได้ โดยใช้วิธีตรวจสอบโดยการลากเส้นขนานกับแกน Y ตัดกราฟของความสัมพันธ์นั้น และถ้ามีเส้นที่ขนานกับแกน Y เส้นใดเส้นหนึ่ง ตัดเกิน 1 จุด ก็แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชั่น

2. ใช้วิธีการคาดคะเน กล่าวคือใช้พิจารณาจากตัวแปร y ว่าอยู่ในรูปกำลังที่เป็นจำนวนเต็มคู่หรืออยู่ในรูปค่าสมบูรณ์หรือไม่ ถ้าอยู่ในลักษณะดังกล่าว ความสัมพันธ์นั้นน่าจะไม่เป็นฟังก์ชัน เช่น

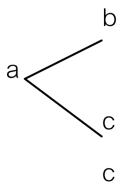
$y^2 = x$ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะว่า ถ้า $x = 1$ จะได้ $y = 1, -1$

$|y| = x$ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะว่า ถ้า $x = 2$ จะได้ $y = 2, -2$

หมายเหตุ การใช้วิธีนี้ค่อนข้างอันตราย ดังนั้นนักเรียนต้องพิจารณาให้รอบคอบโดยยึดหลักการจับคู่ระหว่างสามซิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลัง

3. ตรวจสอบโดยใช้หลักที่ว่า

ให้ $(a, b) \in r$ และ $(a, c) \in r$ ดังภาพ



ถ้าสามารถสรุปได้ว่า $b = c$ ก็แสดงว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชัน

วิธีการนี้เป็นวิธีที่แน่นอน โดยเฉพาะกรณีที่เราไม่สามารถเขียนกราฟได้ นักเรียนควรจะฝึกทำโดยใช้วิธีนี้มาก ๆ

ตัวอย่างที่ 1 จงตรวจสอบว่า $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y^2 = 4x + 1\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ ใช้วิธีที่ 3 จาก $y^2 = 4x + 1$

ให้ $(a, b) \in r$ จะได้ $b^2 = 4a + 1$ ….. (1)

ให้ $(a, c) \in r$ จะได้ $c^2 = 4a + 1$ ….. (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $b^2 = c^2$

$$b = \pm c$$

ดังนั้นเราไม่สามารถสรุปได้ว่า b = c แสดงว่าความสัมพันธ์นี้ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 2 จงตรวจสอบว่า $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x+1}\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ ใช้วิธีที่ 3

จาก $y = \sqrt{x+1}$

ให้ $(a, b) \in r$ จะได้ $b = \sqrt{a+1}$ .....(1)

ให้ $(a, c) \in r$ จะได้ $c = \sqrt{a+1}$ .....(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ b = c

$\therefore$ ความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นฟังก์ชัน

หมายเหตุ *ถ้าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน เรานิยมเขียนเงื่อนไขของฟังก์ชัน ดังกล่าว ในรูปของ $y = f(x) = \ldots..$*

6. **ความหมายของคำว่า ฟังก์ชัน จาก A ไป B**

ถ้ากำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจาก Aไป B

เรานิยมใช้สัญลักษณ์ $f\text{:}A \longrightarrow B$ แทนความหมายดังกล่าว และมีเงื่อนไขว่า $D_f = A$ นั่นคือ ถ้าเรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชัน ก็ไม่ต้องมีเงื่อนไขเพิ่มเติม จากลักษณะเกี่ยวกับการเป็นฟังก์ชันแต่ถ้าเรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชัน **จาก** A ไป B เราต้องมีเงื่อนไขเพิ่มเติมขึ้นมาอีกข้อหนึ่ง คือ $D_f = A$

ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชัน และ $(x, y) \in f$ เรานิยมเขียน y = f (x)

ตัวอย่างที่ 1 ให้ A = {1,2,3,4} B = {3,6,7,8}

1. ถ้า $f_1 = \{ (1,3) , (2,6) , (3,7) , (4,8) \}$

จะพบว่า f_1 เป็นฟังก์ชัน และ Domain ของ f_1 = { 1,2,3,4, } = A

$\therefore$ f_1เป็นฟังก์ชัน**จากA** ไป B

2. ถ้า $f_2 = \{ (1,6) , (2,7) , (3,8) \}$

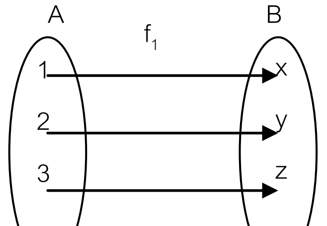
จะพบว่า f_2 เป็นฟังก์ชัน และ Domain f_2 = { 1,2,3 } $\neq$ A

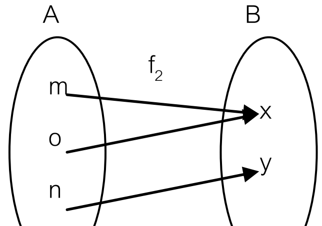
เราจะเรียกว่า f_2 เป็นฟังก์ชันเฉย ๆ แต่ถ้าจะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันจากไหนไปไหน ต้องเรียกว่า f_2 เป็นฟังก์ชันจาก Domain f_2 ไป B

7. **ฟังก์ชันแบบ 1 – 1** (One – to – one function)

ฟังก์ชัน f จะเรียกว่า ฟังก์ชันแบบ 1-1 ก็ต่อเมื่อสมาชิกในเรนจ์แต่ละตัวมีความสัมพันธ์ กับสมาชิกในโดเมนเพียงตัวเดียวเท่านั้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า ไม่มีสมาชิกในโดเมน 2 สมาชิก หรือมากกว่าไปมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์สมาชิกเดียวกัน และเพื่อความเข้าใจ ขอให้นักเรียนดูแผนภาพต่อไปนี้

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความสัมพันธ์ดังแผนภาพต่อไปนี้





เราเรียก f_1 ว่า เป็นฟังก์ชันแบบ 1-1

ส่วน f_2 เรียกว่า เป็นฟังก์ชันไม่ใช่แบบ 1-1 หรืออาจจะเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าเป็นฟังก์ชันแบบ many-to-one (many-1)

8. การตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 – 1 หรือไม่

ลักษณะการตรวจสอบจะคล้ายคลึงกับการตรวจสอบว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันหรือไม่ แต่กลับกัน

1. ถ้าเราสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันนั้นได้ เราจะใช้วิธีการตรวจสอบโดยการลากเส้นขนานกับแกน X ตัดกับกราฟของฟังก์ชันนั้น และถ้ามีเส้นที่ขนานกับแกน X เส้นใดเส้นหนึ่งตัดกับกราฟเกิน 1 จุด ก็แสดงว่าฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชัน ไม่ใช่แบบ 1 – 1
2. ใช้วิธีการคาดคะเน กล่าวคือ ใช้พิจารณาจากตัวแปร X ว่าอยู่ในรูปกำลังที่เป็นจำนวนเต็มคู่หรืออยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์หรือไม่ ถ้าอยู่ในลักษณะดังกล่าว ฟังก์ชันนั้นไม่ควรเป็นฟังก์ชันแบบ 1-1 กล่าวคือควรจะเป็นฟังก์ชันแบบ many – to – one
3. ตรวจสอบโดยใช้หลักที่ว่า

   ให้ $(a,c) \in f$ และ $(b,c) \in f$ ดังภาพ

   ถ้าสามารถสรุปได้ว่า $a = b$ ก็แสดงว่าฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันแบบ 1-1

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid \sqrt{X+1} + \sqrt{Y+1} = 2\}$

จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1-1 หรือไม่

วิธีทำ ฟังก์ชัน f ที่โจทย์กำหนดให้นี้ ถ้าจะนำมาเขียนเป็นกราฟก็คงจะยากและเสียเวลา ดังนั้น ถ้าเราใช้วิธีคาดคะเน คือพิจารณาจากค่า x ปรากฏว่า กำลังของ x ไม่เป็นจำนวนคู่ และค่า x ไม่มีค่าสัมบูรณ์

ฟังก์ชันดังกล่าวน่าจะเป็นฟังก์ชันแบบ 1-1

แต่ถ้าจะตรวจสอบให้แน่ชัด ก็ใช้หลักการในข้อที่ 3 คือให้ $(a, c) \in f$ และ $(b, c) \in f$

$\therefore$ จะได้ว่า $\sqrt{a+1} + \sqrt{c+1} = 2$ ….. (1)

และ $\sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} = 2$ …...(2)

$\therefore$ (1)=(2) จะได้ $\sqrt{a+1} = \sqrt{b+1}$

$$a + 1 = b + 1$$

$$a = b$$

แสดงว่าฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันแบบ 1-1

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$ จงตรวจสอบว่าฟังก์ชัน f เป็น 1-1 หรือไม่

วิธีทำ ถ้าใช้วิธีคาดคะเน ก็ให้พิจารณากำลังของตัวแปร x จะพบว่ากำลังของตัวแปร x เป็นกำลัง 2 ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันไม่ใช่แบบ 1-1

ถ้าใช้วิธีการที่ 3 ก็ให้ (a , c) ε f และ (b , c) ε f จะได้

$c = a^2$ …….. (1)

$c = b^2$ …….. (2)

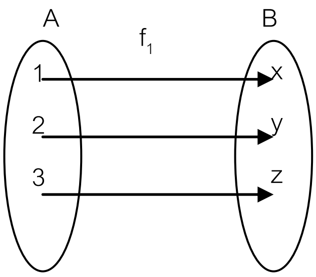
$\therefore$ $a^2 = b^2$ และได้ $a = \pm b$

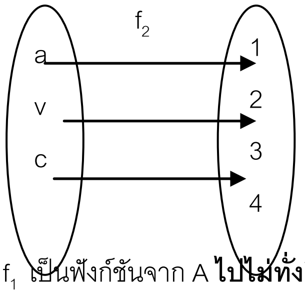
ซึ่งไม่สามารถสรุปได้ว่า a = b

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันไม่ใช่แบบ 1-1

9. ชนิดฟังก์ชัน

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ลักษณะของฟังก์ชัน f สามารถแยกออกเป็น 4 ชนิดคือ



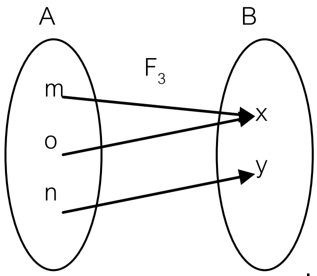


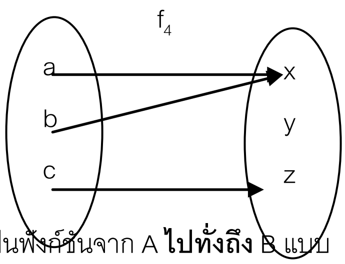
1. f_1 เป็นฟังก์ชันจาก A **ไปทั้งถึง** B แบบ 1 -1

$f_1 : A \xrightarrow[onto]{1-1} B$

2. f_1 เป็นฟังก์ชันจาก A **ไปไม่ทั่งถึง** B แบบ 1 -1

$f_1 : A \xrightarrow[\text{int}\, o]{1-1} B$





3. f_3 เป็นฟังก์ชันจาก A **ไปทั้งถึง** B แบบ many-to-one

$f_3 : A \xrightarrow[onto]{many-1} B$

4. F_4 เป็นฟังก์ชันจาก A **ไปทั่งถึง** B แบบ many-to-one

$f_4 : A \xrightarrow[\text{int}\, o]{many-1} B$

พีชคณิตของฟังก์ชัน

คือการนำฟังก์ชันมาบวก ลบ คูณ หาร กัน ซึ่งผลที่ได้มีลักษณะดังนี้

1. $f + g = \{(x , y)/ y = f(x) + g(x)\}$ *โดยที่* $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
2. $f - g = \{(x , y)/ y = f(x) - g(x)\}$ *โดยที่* $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
3. $f . g = \{(x , y)/ y = f(x).g(x)\}$ *โดยที่* $D_{fg} = D_f \cap D_g$
4. $\frac{f}{g} = \{(x , y)/ y = \frac{f(x)}{g(x)}\}$ *โดยที่ D ของ* $\frac{f}{g} = D_f \cap D_g - \{x / g(x) = 0\}$

10. อินเวอร์สของฟังก์ชั่น

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B อินเวอร์ส ของ r ใช้สัญลักษณ์ r^{-1} จะเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

$$r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$$

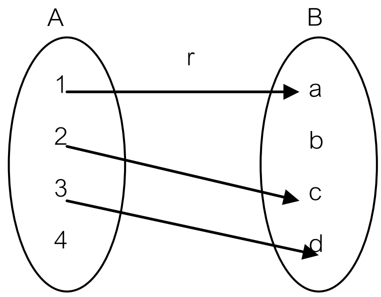
<u>ตัวอย่าง</u> A = {1 , 2 , 3 , 4}

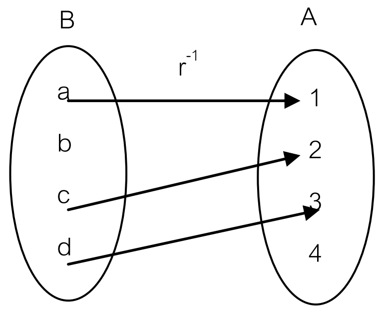
B = {a , b ,c , d}

r = {(1 ,a) , (2 , c) ,(3 ,d)}

r เป็นฟังก์ชั่นจาก A ไป

r^{-1} = {(a , 1),(c , 2),(d ,3)}





11. หลักการหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์

$r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x^2 + 1\}$

$r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid y = 2x^2 + 1\}$ หรือ

$r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid x = 2y^2 + 1\}$

**** สลับที่ ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังกล่าวคือเปลี่ยนจาก (x , y) เป็น (y , x) และ A×B เป็น B×A*

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{3x+1}{2x+1}\}$ จงหา r^{-1}

<u>วิธีทำ</u> เงื่อนไขของความสัมพันธ์ r $y = \frac{3x+1}{2x+1}$

*** $x = \frac{3y+1}{2y+1}$

$$x(2y+1) = 3y+1$$

$$2xy + 2x = 3y+1$$

$$3xy - 3y = 1 - 2x$$

$$y(3x-3) = 1 - 2x$$

$$y = \frac{1-2x}{3x-3}$$

$r^{-1} = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{1-2x}{3x-3}\}$ Ans.

12. **ฟังก์ชันคอมโพสิต**(Composit Function)

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีลักษณะการจับคู่ระหว่างสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลัง